

Gyroscopes for Orientation and Inertial Navigation Systems

Radovan MARJANOVIĆ KAVANAGH

University of Zagreb, Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering, Institute for Geophysical Research and Mine Surveying, Pierottijeva 6, 10000 Zagreb, Croatia

254

Abstract: *In this paper the main elements of gyro-theodolites and inertial navigation systems are provided. The main function principles of mechanical gyros are explained and the main difficulties in maintenance and sources of errors while measuring with gyros and gyro-theodolites are listed. The principles of RLG and FOG gyros and the principles of inertial navigation are explained. The main differences of a guided platform and a strap-down system are explained. A brief review of mathematical expressions for position coordinate- determination from double integration of acceleration measurements from accelerometers is given. It is indicated on difficulties in INS application during a long time period caused by insufficient knowledge of gravity acceleration due to locally gravity anomalies and gyro-drift. The necessity of INS signal correction using another positioning system like GNSS is pointed out, applying Kalman filter algorithms for interpolation between two measuring points so as position prediction of points which are not measured.*

Keywords: *Inertial Geodesy, Inertial Systems, Gyro-scope, Gyro-theodolite, RLG, FOG, Inertial Platform, Strap-down System, Accelerometer, Centrifugal force, Coriolis acceleration, Gravity, Mechanization equations, Kalman filter.*

1 Introduction

A special part of Geodesy, the so called Inertial Geodesy is based on determination of inertial momentum which is generated by the resultant of two assembled movements, the rotation of the Earth and some other

movements (the rotation of a spinning wheel-gyro). The inertial methods and the inertial systems serve for many applications in geodesy, especially in mine surveying and for many military applications. The modern aircraft navigation could not be possible without inertial systems (Grozđanić 1999a), but there are a number of INS applications for civil and military purposes. That are automated alignments of different robots, baggers, drilling machines, and other machines for mining, the alignments of photogrammetric cameras and systems for kinematical rail and road mapping (Caspary et al. 1995), measurement of rail deformations but also fully military applications like tank canon tube alignments while driving, submarine, ships and different missile and projectile orientation and alignment on a previously determined trajectory and others.

2 Gyroscopes for Orientation (Gyro-theodolites)

If we mount a mechanical gyro in a gimbal-system with three degrees of freedom of movements, Fig. 1, the rotation axis of the spinning wheel, will attempt to remain parallel to itself during any movement (with some small deviations caused by the friction in the bearings).

If we reduce a degree of freedom and hang a gyro system on a thin string, after turning on the gyro motor in motion the axis of the gyro will attempt to turn to the direction of the pole (north on the northern part of the Earth) and will slowly swing around this direction. Hence, such measuring systems serve for direct estimations of geographic pole directions (Gyrocompass, Gyro-theodolite). The estimation of the direction to the pole is reduced to the determination of the points between which the gyro swings. These points are called turning points and the pole direction determination is reduced to the

Žiroskopi za orijentaciju i inercijalni navigacijski sustavi

Radovan MARJANOVIĆ KAVANAGH

Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Zavod za geofizička istraživanja i rudarska mjerenja, Pierottijeva 6, 10000 Zagreb

255

Sažetak: U radu su navedeni osnovni elementi žiroteodolita i inercijalnih navigacijskih sustava (INS). Objasnjene su osnovni principi rada mehaničkih žiroskopa, te navedene teškoće i uzroci pogrešaka mjerenja žiroskopom i žiroteodolitom. Razmotreni su principi rada laserskih FOG i RLG žiroskopa. Objasnjene su principi navigacije inercijalnim sustavima. Navedene su osnovne razlike između navođenih platformi i "strap-down" sustava. Dan je pregled matematičkih izraza za računanje koordinata pozicije iz dvostruke integracije mjerenih podataka ubrzanja iz akcelerometara. Upozoreno je na teškoće u primjeni INS-a kroz duži vremenski interval zbog nedovoljno dobrog poznavanja sile ubrzanja, izazvanog lokalnim anomalijama sile teže te "drifta" žirosustava. Istaknuta je potreba korekcije signala INS-a uz pomoć nekog drugog sustava za pozicioniranje i primjenu Kalmanova filtra za interpolaciju između dvije mjerne točke kao i za mogućnost predikcije položaja koji još nije uslijedio.

Ključne riječi: inercijalna geodezija, inercijalni sustavi, žiroskop, žiroteodolit, RLG i FOG laserski žiroskopi, inercijalna platforma, strap-down sustav, akcelerometar, centrifugalna sila, Coriolisovo ubrzanje, gravitacija, mehanizacijske jednadžbe, Kalmanov filter

1. Uvod

Posebno izdvojena grana geodezije, tzv. inercijalna geodezija, zasniva se na ustanovljavanju momenata inercije, koji nastaju kao rezultat sastavljenih gibanja – Zemljine rotacije i nekih drugih gibanja (rotacija žiroskopa – zvrka). Inercijalne metode i inercijalni sustavi služe za

čitav niz primjena u geodeziji, a posebno u rudarskim mjerenjima te za vojne namjene. Suvremena navigacijska aviooprema bila bi nezamisliva bez inercijalnih sustava (Grozđanić 1999a), no postoji čitav niz drugih mirnodopskih i vojnih primjena. To su uređaji za automatsko navođenje različitih robota, bagera, bušilica ili drugih rudarskih strojeva, za navođenja različitih fotogrametrijskih uređaja, kamera i sustava za kinematička snimanja prometnica (Caspary i dr. 1995), te ustanovljavanja deformacija tračnica, ali i isključivo vojnih primjena kao što su stabilizacije i navođenja cijevi tenkova u vožnji, navođenja podmornica, brodova i različitih projektila po unaprijed zadanoj putanji i dr.

2. Žiroskopi za orijentaciju (žiroteodoliti)

Postavi li se mehanički žiroskop u kardanski ovjes s tri stupnja slobode kretanja, sl. 1, os rotacije rotirajućeg žiroskopa u bilo kojem položaju prilikom gibanja uvijek će nastojati ostati sama sa sobom paralelna, uz mala odstupanja koja uzrokuje trenje u ležajevima ovjesa.

Ako se žiroskopu ograniči jedan stupanj slobode i uređaj se objesi o tanku nit, nakon stavljanja u pogon motora žiroskopa os njegove rotacije nastojat će zauzeti smjer prema polu (na sjevernoj polutki prema sjeveru) i oko toga smjera će se polagano njihati. Stoga takvi mjerni sustavi služe za izravno određivanje smjera geografskih polova (žirokompasi i žiroteodoliti). Određivanje smjera prema polu svodi se na računanje sredine krajnjih položaja između kojih se žiroskop niže. Ti se krajnji položaji nazivaju okretno točke, a određivanje smjera sjevera svodi se na određivanje sredine između okretnih točaka. Smjer sjevera može se odrediti računski iz nekoliko mjerenja ili kod novijih uređaja potpuno automatski s pomoću

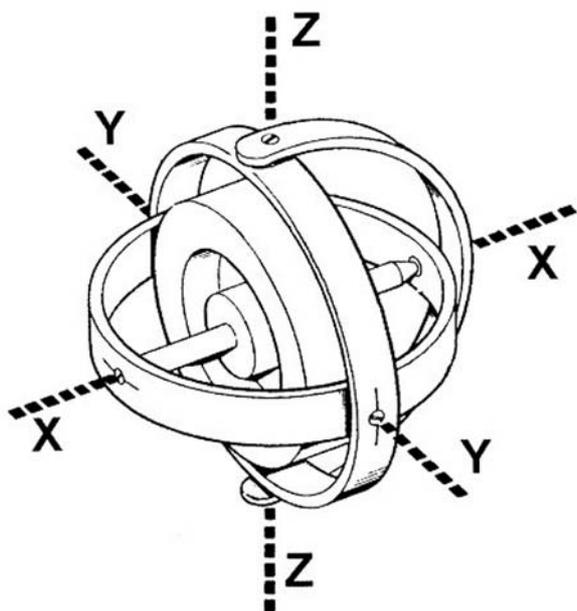


Fig. 1 Gyroscope mounted in a gimbal-system

Sl. 1. Žiroskop postavljen u troosni kardanski sustav

256

calculation of the mean between the turning points. The determination of the pole direction can be calculated from several measurements or in modern instruments fully automatically using electronical sensors and computer. The connection of a theodolite and a gyro to one unit is called gyro-theodolite. The gyro-theodolite is a surveying instrument allocated especially for mine-surveying, and is used primarily for subsurface measurements in tunnel surveying. The gyro which is hanged in the vertical axis of the theodolite serves for the alignment of the horizontally oriented theodolite limb or the orientation of its reading index to the direction of the true north. After determining the direction to the Earth's pole and aligning the horizontal limb, all other measurements could continue in the same way as it is done with theodolites over the surface of the Earth.

Modern gyro-theodolites enable great reliability of direction determination which is about $\pm 1.0''$, but the time interval in which this determination is achieved is also very important. The trend in modern gyro-theodolite constructions is to automate all measurements (Heister 1990). Additionally the modern instruments are smaller, less heavy and at the same time more reliable and more accurate than its forerunner models.

An especially successful model is the fully automated gyro-theodolite GYROMAT 2000, constructed at the DMT – Institut für Lagerstätte, Vermessung und Angewandte Geophysik, Bochum, Fig. 2.

The mechanical gyros are constructed as a ring electro motors (in aircrafts often as air turbines), where the mass of the rotor is concentrated in the edge of the ring. In the time of broad miniaturization the modern gyros became smaller, and to achieve sufficient momentum of inertia the spinning wheel rotates with great speed. Revolutions of 30 000 rev/min and more are common. It is

therefore understandable that the quality of the gyro parts must be at high level, especially the Teflon or gas bearings of the driving motor, which results in very high prices. For sufficient gyro system stability it is logical that the momentum of inertia must be as big as possible. This is what causes big power consumption and bigger thermal radiation producing gyro instabilities (gyro drift rate) (Brunner 2000).

Except for determining the direct direction to the Earth's poles, which is especially important for mine surveying (for controlling and drilling of long tunnel tubes), the gyro spinning wheel serves for orientation, regulation and stabilization of measuring platforms in inertial navigation systems.

3. The Gyroscopes for Stabilization

In the mid sixties of the last century laser gyros were constructed. They are called Ring Laser Gyro or RLG systems. The RLG does not consist of any mechanical parts which are rotating. So the power consumption of such systems is very low regardless of its position. Thus, such systems are thermally and dimensionally very stable and they have very good long term stability.

The changes of the RLG position (turning) in the plane of the laser could be determined by measuring the frequency changes of the monochromatic, coherent light generated by this system (King 1988).

The principle of the RLG system is based on the Sagnac's effect, Fig. 3.



Fig. 2 Modern fully automated Gyro-theodolite GYROMAT 2000, developed on the DMT – Institut für Lagerstätte, Vermessung und Angewandte Geophysik, Bochum

Sl. 2. Suvremeni automatizirani žiriteodolit GYROMAT 2000, razvijen na DMT – Institut für Lagerstätte, Vermessung und Angewandte Geophysik, Bochum

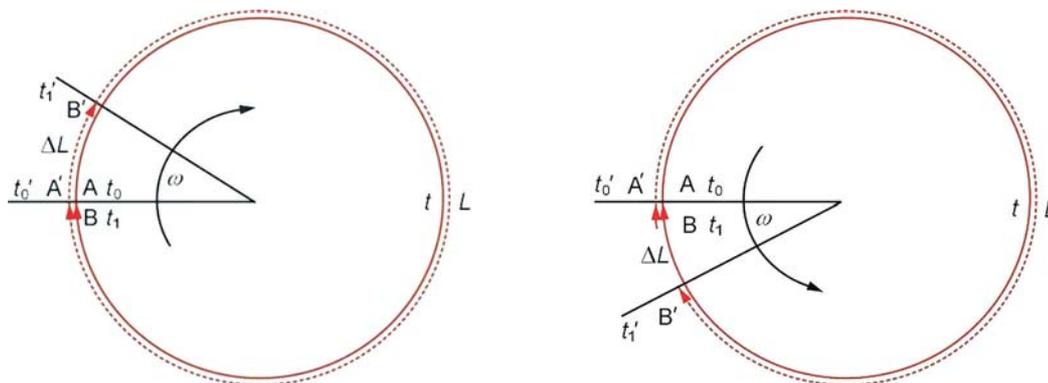


Fig. 3a and Fig. 3b Sagnac's effect

Sl. 3a i Sl. 3b Sagnacov efekt

elektroničkih senzora i računala. Povezivanjem teodolita i žiroskopa nastaje konstrukcija poznata kao žiroteodolit. Žiroteodolit je geodetski mjerni instrument namijenjen uglavnom rudarskim mjerenjima, a primjenjuje se u prvom redu za mjerenja pod zemljom, odnosno u tunelogradnji. Žiroskop koji je obješen u vertikalnoj osovini teodolita služi za orijentaciju horizontalnog limba teodolita odnosno njegova indeksa u odnosu prema smjeru sjevera. Nakon što se žiroskopom utvrdi smjer prema Zemljinim polovima i orijentira horizontalni limb, sva se ostala mjerenja obavljaju teodolitom (kao da se mjeri na Zemljinoj površini).

Suvremenim žiroteodolitima postiže se velika pouzdanost pri određivanju smjera, a ona se kreće oko $\pm 1,0''$, ali je također osobito važno vrijeme trajanja mjerenja u kojem je potrebno da se žiroskop stabilizira. Kod novijih konstrukcija nastoje se sva mjerenja u potpunosti automatizirati (Heister 1990). Uz to su suvremeni žiroteodoliti znatno manjih dimenzija i težine, a istodobno bitno pouzdaniji i točniji od svojih prethodnika.

Iznimno je uspjele konstrukcije potpuno automatizirani, mehanički žiroteodolit GYROMAT 2000, razvijen na DMT – Deutsche Montan Technologie GmbH – (Institut für Lagerstätte, Vermessung und Angewandte Geophysik, Bochum), sl. 2.

Mehanički žiroskopi konstruirani su kao prstenasti elektromotori (a kod zrakoplova često kao zračne turbine), kod kojih je masa rotora raspoređena po obodu prstena. U eri opće minijaturizacije suvremeni žiroskopi postaju manjih dimenzija, a da bi mogli postići zadovoljavajući moment tromosti, žiroskopi rotiraju s vrlo velikim brojem okretaja. Brzine rotacije od 30 000 okr./min i više uobičajene su. Razumljivo je stoga da su u pogledu kvalitete materijala i preciznosti izvedbe mehaničkih žiroskopa, a posebice teflonskih (ili zračnih) ležajeva motora, postavljeni vrlo visoki zahtjevi, što rezultira iznimno visokim cijenama. Za postizanje zadovoljavajuće stabilnosti žirosustava logično je da moment tromosti mora biti što je moguće veći. Upravo zbog toga potrebna je veća energija za napajanje žiromotora, a to opet za sobom povlači veće zagrijavanje sustava te uz vanjske promjene temperature, izravno utječe na stabilnost žirosustava (engl. gyro drift rate) (Brunner 2000).

Osim za izravno određivanje smjera prema polovima Zemlje, što ima posebno značenje u rudarskim mjerenjima (osobito pri izradi i kontroli smjera proboja dugih tunela), žiroskopi služe za orijentaciju, regulaciju i stabilizaciju mjernih platformi inercijalnih navigacijskih sustava.

3. Žiroskopi za stabilizaciju

Sredinom šezdesetih godina prošlog stoljeća konstruirani su laserski žiroskopi. Nazvani su Ring Laser Gyro ili skraćeno RLG sustavi. Kod takvih žiroskopa ne postoje mehanički dijelovi koji rotiraju te stoga RLG žiroskopi troše malo energije (struje) bez obzira u kojem se položaju nalaze. Stoga su takvi uređaji termički i dimenzionalno vrlo stabilni, te se odlikuju odličnom dugotrajnom stabilnošću.

Promjene položaja (zakretanje) RLG u ravnini lasera ustanovljuju se mjerenjem promjena frekvencije, monokromatske, koherentne svjetlosti koja se generira u takvom uređaju (King 1988).

Princip rada RLG sustavu zasniva se na Sagnacovu efektu, sl. 3.

Zamislimo da se svjetlosni impuls (foton) kreće kružno u smjeru kazaljke na satu, kroz svjetloprovodni medij, koji miruje, na sl. 3a i sl. 3b, unutarnja puna crvena linija. Počevši od točke A, u trenutku t_0 svjetlost će trebati određeno vrijeme t da prevali put kroz svjetloprovodni medij duljine L , pa da ponovno stigne do točke B, gdje se detektira u trenutku t_1 .

Pretpostavimo da se svjetloprovodni medij zakreće u smjeru kretanja kazaljke na satu, tj. u istom smjeru kao što i impuls svjetla prolazi kroz svjetlovod od točke A' u trenutku t_0' , na sl. 3a isprekidana crvena linija. Zbog rotacije svjetloprovodnog medija u trenutku t_1' , točka A' će biti na mjestu B'. Zbog toga će impuls svjetla da bi prošao od točke A' do točke B' trebati proći putanju punog kruga (360°) i trebat će prevaliti još i dodatni put ΔL u dodatnom vremenskom intervalu Δt , koji je određen kutnom brzinom zakretanja medija, tj. kutom zakreta ω .

Nasuprot tomu, zakreće li se svjetloprovodni medij u suprotnom smjeru od kretanja kazaljke na satu, tj. u

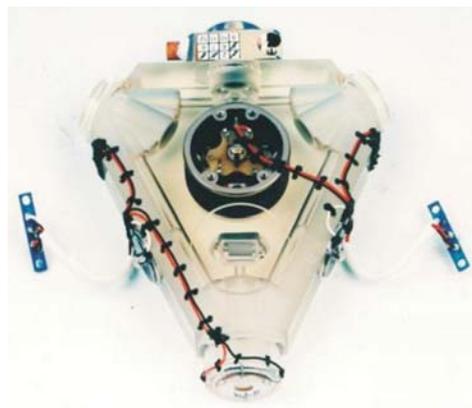
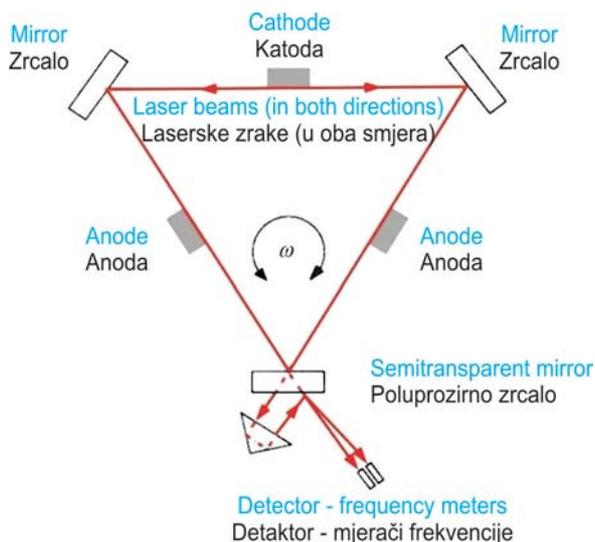


Fig. 4. Principle of a RLG and a RLG of the firm Marconi (Ferranti)
 Sl. 4. Princip RLG žiroskopa i RLG firme Marconi (Ferranti)

258

Let us imagine a light pulse (photon) moving in clockwise direction through a light conducting motionless medium in Fig. 3a and Fig. 3b, the inner full red line. Starting at the point A at the time t_0 the light needs some definite time t to pass through the light conducting medium of a length L to come again to the point B where it is detected.

Presume that the light conducting medium rotates in a clockwise direction in the same direction that the light pulse passes through the light conducting medium from the point A' at t_0' , in Fig. 3a the interrupted red line. Due to the rotation of the light conducting medium at t_1' the point A' will be at the position B'. Because of that the light pulse must pass the full circle (360°) in order to come from A' to B' and must pass the additional path ΔL in an additional time interval Δt , which is determined by the rotating speed of the medium being the rotation angle ω .

On the other hand if the light conducting medium rotates counter clockwise in the opposite direction of the light pulse in Fig. 3b, the interrupted red line, starting at the point A' at t_0' , the light pulse will need for Δt shorter time to come around the full circle because the point B' has approached at the time t_1' .

After determining the time the light pulse needs to pass through the rotating light conducting medium, it is possible to determine the time difference Δt compared to the known time t for the light pulse to pass the medium of the length L when it is motionless. In this way it is possible to determine the position difference or the rotation of the medium for the angle $\Delta\omega$ in one or the other direction.

The RLG is constructed on the basis of this principle. In a triangle glass tube at each corner three mirrors are positioned forming an optical resonator, Fig. 4. The tube is under low pressure filled with a helium-neon mixture. Three electrodes are inserted in the tube with one cathode and two anodes where the voltage of about 1kV is

applied. In this way a monochromatic coherent light is generated, with a wavelength established by the medium (He-Ne Laser about 633×10^{-9} m). Exactly two laser beams are generated in the same medium and their lights are directed in two opposite directions. The third mirror is semi transparent so a part of the light beams of each laser comes out of the triangle and those frequencies are detected by a sensor. When the system is motionless, both frequencies are equal. Each rotation of the optic triangle in the plane of the laser changes the frequency in one or the other side for the angle ω (Doppler effect) while the frequency of one laser alters and the frequency of the other reduces.

The change of the registered frequency is exactly proportional to the rotation angle. Precise determination of the registered frequency provides the determination of the rotation angle of the RLG around the axis perpendicular to the plane of the laser.

In the seventies of the past century the Fibre Optic Gyro – FOG system was developed which is in its principle very similar to the RLG system. The main difference between both systems is that the RLG is an optical resonator with frequency determination and the FOG is an interferometer system. The monochromatic coherent light – laser of the FOG is mounted outside the system. At a semi transparent mirror the light beam is separated in two parts. One light beam is entering the system at the beginning and the other at the same time at the end of a coil wound with optic fibre. The coil consists of a large number of windings so the path of the light is increased (and also the time of the light passing through the optic fibre).

As the light passes the same path (through the same optic fibre) in both directions, the detector detects waves with certain difference in phases of both signals. Each rotation of the system in the plane of the coil windings for the angle ω causes a time delay of one of the signals

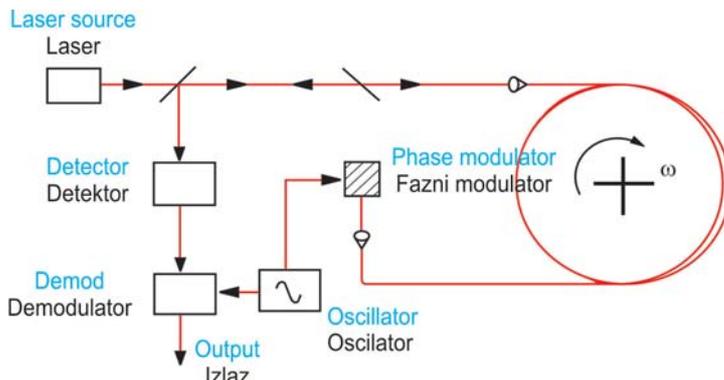


Fig. 5. Principle of a FOG (with phase modulator) and a FOG of the firm Litton

Sl. 5. Princip FOG žiroskopa (s faznim modulatorom) i FOG firme Litton

suprotnom smjeru u kome se kreće impuls svjetla kroz svjetloprovodni medij, na sl. 3b isprekidana crvena linija, počevši od točke A' u trenutku t_0' , impuls svjetla će trebati za Δt kraće vrijeme da obiđe puni krug jer mu je završna točka B' došla u susret u trenutku t_1' .

Određivanjem vremena prolaska impulsa svjetla kroz svjetloprovodni medij moguće je stoga ustanoviti odstupanja Δt od poznatog vremena t koje je potrebno da impuls svjetla prođe put određene duljine L u stanju mirovanja. Na taj je način moguće ustanoviti promjene položaja odnosno zakretanje svjetloprovodnog medija za $\Delta\omega$ u jednu ili drugu stranu.

Upravo na tom principu konstruiran je RLG. U staklenoj cijevi oblika trokuta u kutove su postavljena tri zrcala tako da tvore optički rezonator, sl. 4. Cijev je pod malim tlakom i ispunjena je mješavinom helija i neona. U cijevi su ugrađene tri elektrode: od toga jedna katoda i dvije anode koje se napajaju visokim naponom od oko 1kV. Na taj se način u cijevi generira monokromatska koherentna svjetlost kojoj je valna duljina određena medijem (He-Ne LASER oko 633×10^{-9} m). Točnije, u cijevi su tako nastala dva lasera kojima se svjetlost kreće u dva suprotna smjera. Konstruktivno je učinjeno da je jedno od zrcala polupropusno tako da zrake svjetla iz oba smjera jednim dijelom prolaze kroz njega. Iza polupropusnog zrcala su postavljena dva detektora koji registriraju frekvenciju lasera. Miruje li sustav, tada se na izlazu iz detektora registrira ista valna duljina iz oba lasera. Svako zakretanje optičkog sustava za kut ω u jednu ili drugu stranu uvjetuje promjenu registriranih frekvencija (Dopplerov efekt), jer se frekvencija iz jednog lasera kod zakretanja povisuje, a frekvencija iz drugoga snižava. Promjena registrirane frekvencije proporcionalna je iznosu kuta zaokreta. Preciznim određivanjem razlike frekvencija moguće je stoga odrediti kut zaokretanja RLG oko osi okomite na ravninu lasera.

Sedamdesetih godina prošloga stoljeća razvijen je Fibre Optic Gyro – FOG sustav, koji je u svojoj osnovi vrlo sličan RLG sustavima. Osnovna razlika između ta dva sustava je što je kod RLG sustava primijenjen optički rezonator, kod kojeg se određuje promjena frekvencije, dok je FOG sustav interferometrijski. Kod FOG sustava

je izvor monokromatske koherentne svjetlosti – laser – postavljen izvan sustava. Svjetlost iz lasera se na polupropusnom zrcalu grana i dovodi istodobno na početak i kraj svjetlovoda koji je namotan kao zavojnica. Zavojnica ima velik broj zavoja, pa se time znatno produljuje put zrakama svjetla kroz svjetlovod (i time povećava vrijeme kretanja svjetla kroz medij). Kako svjetlo prealjuje isti put (kroz isti svjetlovod) u oba smjera, na detektoru se kod mirovanja sustava pojavljuje svjetlost s određenim razmakom faza primljenih signala. Svako zakretanje sustava u ravnini namotaja za kut ω uvjetuje kašnjenje jednog od signala kroz svjetlovod, što se manifestira razlikom u fazi između jednog i drugog signala.

Unapređenje tog rješenja postignuto je dodatkom modulatora faze, pri čem se svjetlost modulira u modulatoru, a izlazni signal detektira u ovisnosti o fazi (moduliranog vala), sl. 5. Stabilnost FOG sustava je već principno bitno manja nego kod RLG sustava, no znatno niža cijena tih sustava otvara mogućnosti primjene žirotehnologije i u jednostavnijim aplikacijama. U novije doba kod FOG sustava se uspjelo značajno poboljšati rezoluciju. Usprkos navedenom, najveći izvor smetnji FOG sustava je i dalje znatna osjetljivost na promjene temperature. Zbog promjena temperature mijenja se duljina puta zrakama svjetla, što se direktno očituje kao pogreška mjerenja.

Postavljanjem triju mehaničkih, RLG ili FOG sustava u tri okomite ravnine moguće je određivanje promjene kuta zaokreta u prostoru, sl. 6.

Bez obzira kakvi žirosustavi se koriste za stabilizaciju mjernih platformi u prostoru, sile koje nastoje zaokrenuti žiroskope se registriraju, a signali se pojačavaju i dovode na servomotore za zakretanje platforme ili se u računalu signali obrađuju i računa kompenzacija koja bi odgovarala zakretu platforme kada bi njezina orijentacija u prostoru ostala nepromijenjena.

Na samom početku razvoja, RLG sustavi su bili neusporedivo skuplji od mehaničkih žiroskopa, a obećavali su znatno bolje rezultate. Tek ranih osamdesetih godina RLG sustavi su cijenom postali konkurentni mehaničkim žiroskopima. U međuvremenu je razvoj mehaničkih

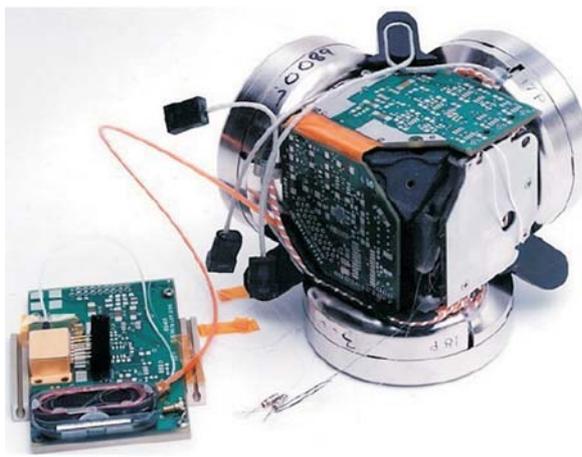


Fig. 6. RLG-s of the firm Marconi and FOG-s mounted in three perpendicular planes
Sl. 6. RLG firme Marconi i FOG firme Litton postavljeni u tri međusobno okomite ravnine

through the optical fibre, which causes phase difference of both signals.

260

The improvement of this system is achieved by adding a phase modulator where the light is modulated in the modulator and a phase sensitive detecting is applied, Fig. 5. The stability of the FOG is limited by the principle of the system and is significantly lower than of the RLG, but an essentially lower price of these systems opens the possibility of gyro techniques in simpler applications.

The resolution of FOG systems has been significantly increased recently. Moreover, the biggest error sources of the FOG system is still the temperature sensitivity. It is caused by the dimensional changes of the fibre optic influenced by the temperature change, which directly causes measuring errors.

Putting three mechanical, RLG or FOG systems into three perpendicular planes makes it possible to determine a rotation angle in space, Fig. 6.

Regardless of the gyro system applied for the measuring platform stabilization, the forces that try to rotate the gyros are registered and the signals are amplified leading to the servomotors to rotate the platform, or the signals are processed in computers and compensation is calculated as the platform orientation remains unchanged in space.

At the beginning of the RLG development these systems have been incomparable in price with mechanical gyros, but they promised much better results. Even at the early eighties, the RLG systems became comparable to the spinning wheel. In the mean time the constructions of the spinning wheel have developed, so the reliability of these systems is practically unlimited. As the long term stability also decreases (King 1998) comparable results can be achieved with both systems. In the last years the mechanical gyros have not developed but the laser gyros development has been very intensive.

Since the stability of the gyros, which is measured in milli-radians in time (per hour) is besides the sensitivity

the most important attribute, it is presumed the miniaturisation and the price sinking of the electronics will lead to primacy of the RLG due to its frictionless mechanical parts.

Although it is possible to use a laser gyro for the pole direction determination, a commercial practical application for geodetic purposes has not been yet achieved.

4 Gyro-Systems for Navigation (INS)

If we mount three independent gyros in a Cartesian three axis system in the direction of the axis it is possible to determine the position change in space, and thus determine the coordinates of the measuring system. Because of that, there are also three accelerometers on an inertial platform that measure the change in movement – the acceleration. The main parts of an INS are:

- The platform on which the measuring sensors and mechanical or optical gyros (RLG or FOG) are mounted.
- Three (at least) accelerometers (A_x, A_y, A_z).
- Three associated gyros ($\check{Z}_x, \check{Z}_y, \check{Z}_z$), which establish the referent orientation of the platform, Fig. 7.

Before activating the INS, it is necessary to make an initial orientation of the platform or to make the referent orientation. In Fig. 8 the labels (x_i, y_i, z_i) mark the inertial coordinate system for which it is presumed to be fixed in space. With labels (x_e, y_e, z_e) the coordinate system is marked that follows the rotation of the Earth with the angle velocity Ω . The axis x_e is oriented to the prime meridian through Greenwich, and it is presumed that the z axes of both systems lie together ($z_i=z_e$).

Since the platform is to be oriented on the surface of the Earth (or close over or under the surface), for practical reasons the user uses the system (φ, λ, h) or the local system of the platform coordinates (x_p, y_p, z_p).

Due to small influences (compared to the measured signals from the accelerometers, and other error sources)

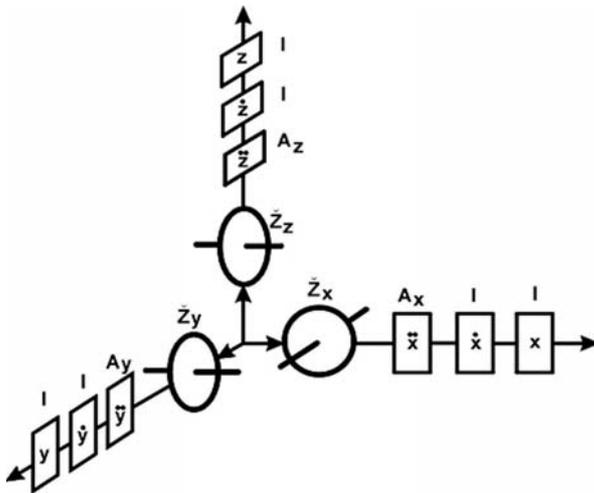


Fig. 7. The principle of a three axis INS
Sl. 7. Princip troosnog inercijalnog sustava

žiroskopa također uznapredovao tako da vijek trajanja mehaničkih žiroskopa gotovo nije ograničen. Kako im je također značajno poboljšana dugotrajna stabilnost (King 1998), to se obim sustavima postižu podjednako dobri rezultati. Mehanički žiroskopi posljednjih godina više nisu usavršavani, ali su intenzivno istraživana nova rješenja laserskih žiroskopa.

Kako je stabilnost žirosustava, koja se mjeri u miliradijanima u jedinici vremena (sat), uz osjetljivost najvažnije svojstvo žiroskopa, zbog potpunog izostanka trenja habajućih dijelova pretpostavlja se da će minijaturizacijom i pojeftinjenjem elektroničkih sklopova RLG sustavi u budućnosti ipak preuzeti primat.

Iako je za određivanje smjera prema polu s uspjehom moguće primijeniti i laserski žiroskop, primjene za praktične geodetske namjene do danas nisu ostvarene.

4. Žirosustavi za navigaciju (INS)

Postave li se tri neovisna žiroskopa u troosnom Kartezijevu sustavu u smjeru koordinatnih osi, moguća su određivanja promjene položaja u prostoru, a time i određivanje prostornih koordinata mjernog sustava. Stoga su na platformi inercijalnih uređaja uz žiroskope postavljeni akcelerometri, koji registriraju promjene gibanja odnosno ubrzanje. Bitni sastavni dijelovi takvog INS-a su:

- platforma na kojoj su postavljeni mjerni senzori: akcelerometri i mehanički ili optički žiroskopi (RLG ili FOG)
- (najmanje) tri akcelerometra (A_x, A_y, A_z)
- tri pripadna žiroskopa ($\dot{z}_x, \dot{z}_y, \dot{z}_z$), koji služe za održavanje osnovne ili referentne orijentacije platforme, sl. 7.

Prije stavljanja u pogon INS-a, potrebno je platformu postaviti u inicijalni položaj, odnosno odrediti tzv. referentnu orijentaciju. Na slici sl. 8 je oznakama (x_i, y_i, z_i)

naznačen inercijalni koordinatni sustav za koji se pretpostavlja da je u prostoru nepokretan. Oznakama (x_e, y_e, z_e) naznačen je zemaljski (engl. Earth) koordinatni sustav koji slijedi Zemljinu rotaciju s kutnom brzinom rotacije Ω . Pritom je os rotacije x_e usmjerena u početni ili nul-meridijan kroz Greenwich, a pretpostavlja se da se osi rotacije z oba navedena sustava podudaraju ($z_i = z_e$). Kako platformu trebamo orijentirati na Zemljinoj površini (ili neposredno iznad ili ispod nje), to je iz praktičnih razloga za korisnika najjednostavnije koristiti sustav (φ, λ, h) ili lokalni koordinatni sustav platforme (x_p, y_p, z_p).

Pri ovim razmatranjima, zbog zanemarivo malih iznosa (u odnosu na veličine koje mjerimo akcelerometrima, ali i zbog utjecaja drugih izvora pogrešaka) svjesno zanemarujemo Galilejev prostor, te ishodište našeg inercijalnog prostora postavljamo tako da se poklapa sa središtem Zemljine mase. Također, svjesno zanemarujemo da se Zemlja okreće oko Sunca i da se Sunce giba u svemiru (a i svemir ne miruje).

Kod suvremenih INS-a, inicijalna ili referentna orijentacija platforme obavlja se uglavnom potpuno automatski. Kod toga se os z_p platforme postavlja u smjer lokalnog vertikala (horizontiranje), a os x_p platforme poprima smjer prema sjeveru. Ovisno o korisniku sustava, druga horizontalna os y_p se usmjerava prema istoku ili zapadu. Tako orijentirani koordinatni sustavi su iz literature poznati kao desni NED sustavi (North, East, Down) (Stovall 1997), ali se koriste i drugačiji sustavi, na pr. NEU (North, East, Up) ili drugi (Schwarz 2000).

Kod zrakoplova se najčešće koriste koordinatni sustavi koje definira tijelo zrakoplova tzv. bodi-sustav, pri čem je uzdužna os x_b orijentirana prema naprijed, poprečna os y_b orijentirana je na desno, a vertikalna os z_b je usmjerena tako da definira desni NED koordinatni sustav. U

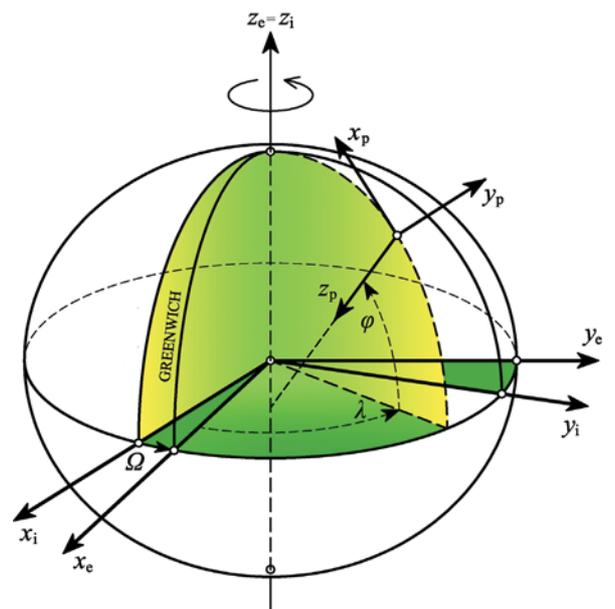


Fig. 8. Coordinate systems and the initial orientation of the platform in NED system

Sl. 8. Koordinatni sustavi i inicijalna orijentacija platforme u NED sustavu

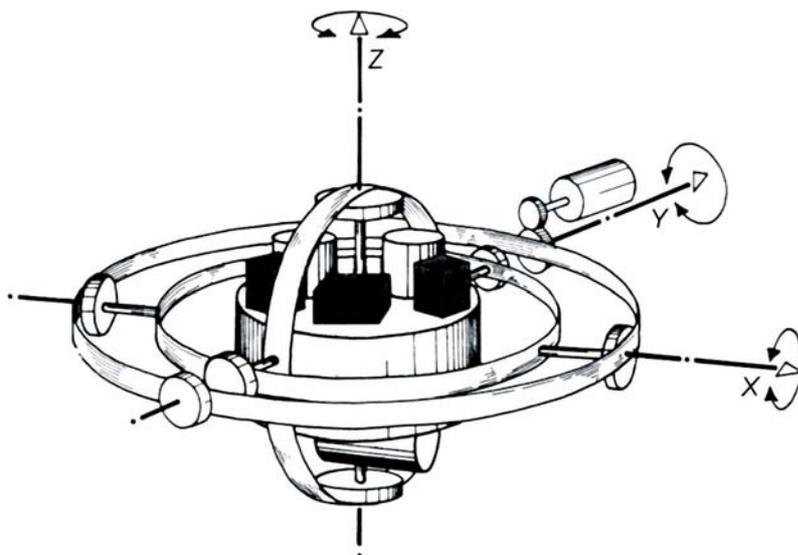


Fig. 9. Three axes inertial platform mounted in a gimbal system

Sl. 9. Troosna inercijalna platforma postavljena na kardanski sustav prstenova (gimbal system)

262

we consciously neglect the Galileo's space, putting the origin of our inertial space in the middle of the centre of the Earth's mass. Also we neglect the Earth's rotation around the Sun and that the Sun is moving in space (and the space is also not stable).

In modern INS the initial or referent orientation of the platform is fully automatic.

The z_p axis of the platform is positioned in the direction of the locally vertical or nadir (levelling) and the x_p of the platform is oriented to the true north. Depending on the user the other horizontal axis y_p is oriented to the east or west. Such oriented system is known as the right NED system (North, East, Down), (Stovall 1997), but other systems are also in use like NEU (North, East, Up) or others, (Schwarz 2000).

In aircrafts it is common to use coordinate systems which define the body of the plane (body-system) where the longitudinal axis x_b is oriented forward, the cross axis y_b is oriented to the right, and the vertical axis z_b is oriented to form a right NED coordinate system. Expressed in angles the forward tilt called pitch is denoted as θ , the left-right tilting along the longitudinal axis is called roll ϕ , and the rotation around the vertical axis is yaw ψ . Such systems are absolutely independent of the Earth's coordinate systems.

Today, two types of INS are in use according to initial orientation and guidance of the referent platform orientation in space:

- Classically guided platform with servomotors and the stabilisation with gyroscopes mounted perpendicularly to the sensitive axis of the accelerometers.
- Sensors mounted on the platform, RLG (or FOG), computers where the corrections are calculated and that compensate the changes in orientation of the platform, the so called analytical platform or strap-down system.

In both systems signals from three accelerometers (A_x, A_y, A_z) and three gyros ($\dot{Z}_x, \dot{Z}_y, \dot{Z}_z$) are used. All six components of movement, three translations and three rotations are measured (King, 1975). So each gyro ensures the orientation of one platform axis.

In classical INS the spinning wheels of the "integration type" mounted with one degree of freedom are used. That enables a gimbal system with a special construction of Teflon (or gas) bearings, Fig 9. Such "geometric stabilisation" enables complete platform position decoupling of the position where the platform is mounted, and makes it independent of the vehicle position. Thus the gyros here serve more as error detectors in the platform orientation than for stabilisation.

During movements with an inertial platform over the Earth's surface in the function of position on the Earth's ellipsoid $f(\varphi, \lambda, h)$, and with the angle velocity of Earth's rotation Ω , a precession moment affects the gyros (the spinning wheel is affected also with friction and other error sources). The resultant of these forces is registered with special sensors. After amplification the output signals from the sensors are lead to the servomotors. During the movement of the platform over the surface of the Earth, the servomotors must constantly turn the platform to follow the shape of the Earth to remain in the initial orientation. Proportionally to the signal from the sensor the vertical axis z_p must stay in the local vertical, so the axes x_p and y_p remain in the horizontal plane, where the x_p axis constantly remains in the direction of the meridian, Fig. 10.

In strap-down systems with RLG the signals from the gyros are continuously registered in the computer where a torque of the platform in inertial space is simulated using a mathematical model.

If we consider a simplified spherical Earth with a radius R , the angular torque of the platform is $\dot{\theta} = v/R$,

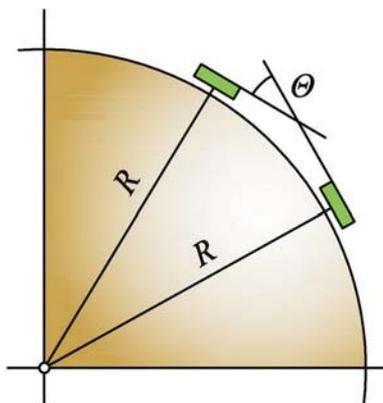


Fig. 10. Tilt of the platform in accordance with the curvature of the Earth

Sl. 10. Zaokretanje platforme u skladu sa Zemljinim zaobljenjem

kutnim iznosima naginjanje zrakoplova prema naprijed (napadni kut) naziva se (prema engl.) *pitch* i označava s θ , naginjanje oko uzdužne osi *roll* ϕ , a zakretanje oko vertikalne osi *yaw* ψ . Takvi su sustavi potpuno proizvoljno orijentirani u odnosu prema koordinatnim sustavima vezanima za Zemlju.

Danas su u upotrebi dva tipa INS-a, s obzirom na postizanje inicijalne orijentacije, te poslije (prilikom rada uređaja) kontinuirano održavanje referentne orijentacije platforme, u inercijalnom prostoru. To su:

- klasično rješenje navođenja platforme servomotorima i njezina stabilizacija uz pomoć žiroskopa, čije su osi postavljene okomito na smjerove osi osjetljivosti akcelerometara
- ili novije rješenje kruto povezanih senzora s platformom (RLG i FOG žiroskopi) i računala, kod kojih se računskim putem kompenzira promjena u orijentaciji platforme, tzv. analitička platforma (engl. *strap-down system*).

Zajedničko je kod oba sustava da se koriste signali iz tri akcelerometra (A_x, A_y, A_z) i tri žiroskopa ($\dot{Z}_x, \dot{Z}_y, \dot{Z}_z$). Ustanovljuje se svih šest komponenata gibanja – tri translacijske i tri rotacijske (King 1975). Stoga, svaki žiroskop osigurava orijentaciju jedne od osi platforme.

Kod klasičnog INS-a koriste se mehanički žiroskopi, tzv. integracijskog tipa, koji se postavljaju s jednim stupnjem slobode. To omogućuje sustav kardanski postavljenih prstenova (engl. *gimbal system*) s posebnom konstrukcijom teflonskih (ili zračnih) ležajeva, sl. 9. Ta tzv. geometrijska stabilizacija omogućuje potpuno odvajanje položaja platforme od položaja mjesta njezina učvršćenja, te ju čine neovisnom o položaju vozila. Stoga ovdje žiroskopi služe više kao detektori pogrešaka u orijentaciji platforme, nego izravno kao njezini stabilizatori.

Pokrećući se inercijalnom platformom po Zemljinoj površini, u funkciji mjesta na Zemljinoj elipsoidu $f(\varphi, \lambda, h)$,

te uz kutnu brzinu Zemljine rotacije Ω , na žiroskope djeluje moment precesije (a kod mehaničkih žiroskopa utječe i trenje u ležajevima i drugi izvori pogrešaka). Ukupni iznosi tih sila registriraju se posebnim sensorima. Nakon pojačanja izlazni se signali sa senzora dovode na servomotore. Servomotori, prilikom pokretanja platforme po Zemljinoj površini, moraju zbog njezine zaobljenosti, stalno naginjati platformu da bi ona zadržala inicijalnu orijentaciju. Proporcionalno sa signalom iz senzora, vertikalna os inercijalne platforme z_p , prilikom pomicanja ostaje usmjerena prema lokalnom vertikalu, tj. osi (x_p i y_p) ostaju u horizontalnoj ravnini, pri čem os x_p platforme stalno prati smjer lokalnog meridijana, sl. 10.

Kod optičkih žiroskopa koji su kruto učvršćeni na platformu (*strap-down* sustav), signali iz žiroskopa u računalu se kontinuirano registriraju, pri čem se u matematičkom modelu simulira zakretanje platforme u inercijalnom prostoru.

Ako pojednostavljeno promatramo Zemlju kao sferu polumjera R , promjena kuta nagiba platforme pritom je jednaka $\dot{\theta} = v/R$, pri čemu je v jednako linearnoj brzini određenoj iz prvog integratora. Stoga vrijedi izraz:

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{R}, \quad (1)$$

pri čem je a ubrzanje izmjereno akcelerometrom (King 1998).

Ako platforma u inicijalnom postavu nije bila potpuno horizontirana to će mjerena veličina a predstavljati sumu ubrzanja platforme i komponente koja potječe od ubrzanja sile teže g . Taj izraz možemo shvatiti kao diferencijalnu jednadžbu gibanja jednostavnog neprigušenog njihala duljine Zemljina polumjera R . Uz tako definirane veličine, frekvencija harmoničkog neprigušenog njihala će biti:

$$\omega_{osc} = \sqrt{\frac{g}{R}},$$

a period njihanja njihala

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{osc}}. \quad (2)$$

Stoga će platforma u prostoru polagano njihati s periodom T od oko 84 min. Taj period njihala poznat je iz literature kao Schulerov period. Kako je Zemlja nepravilno tijelo različite gustoće i rasporeda masa, to će zbog jednostavne aproksimacije Zemlje homogenim elipsoidom prilikom pokretanja platforme po njezinoj površini (ili neposredno uz nju) uvijek nastajati njihanje platforme sa Schulerovim periodom. To neprigušeno njihanje će se manifestirati kao pogreška u mjerjenju ubrzanja na obje horizontalne osi platforme (x_p i y_p).

Osnovni mjerni instrument za mjerenje ubrzanja svakog inercijalnog sustava je akcelerometar. Akcelerometri su najčešće minijaturna ili subminijaturna njihala kod kojih promjena položaja akcelerometra u određenom smjeru pomiče njihalo, čiji se pomak od inicijalnog položaja registrira kapacitivnim, induktivnim ili poluvodičkim sensorom. Suvremeni akcelerometri uglavnom

where v is the linear velocity determined from the first integration.

Thus we can write:

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{R}, \quad (1)$$

where a is the acceleration measured with the accelerometer, (King 1998).

If the platform in the initial position was not perfectly levelled the measured a will be the sum of the acceleration of the platform and the component of the gravity acceleration g . This expression we could interpret as a differential movement equation of an undamped pendulum with a length of the Earth's radius R . With such parameters the frequency of a harmonic undamped pendulum is:

$$\omega_{osc} = \sqrt{\frac{g}{R}},$$

and the period of the pendulum is:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{osc}}. \quad (2)$$

Thus the platform will slowly swing with a period T of about 84 min. This period is known from literature as the Schuler's period. As the Earth is an improperly curved body with different density and mass disposition, caused by the simple approximation of the Earth with a homogeneous ellipsoid, during movements of the platform over the surface of the Earth (or very close to the surface) the swinging of the platform with a Schuler's period will always rise. This undamped swinging will result as error in acceleration measurements on both horizontal axes (x_p and y_p) of the platform.

The basic sensing instrument for acceleration measurements of each inertial system is an accelerometer. Accelerometers are mostly miniature or subminiature pendulums where the change in position of the accelerometer in a defined direction moves the pendulum. The movements of the pendulum from the initial position are registered with capacitive, inductive or semiconductor sensors. Modern accelerometers mostly do not have any moving parts (solid state), so the signal from the accelerometer is used to cancel the force which affects the pendulum, Fig. 11.

For acceleration measurements the accelerometers must be stabilised and oriented according to the initial orientation. In nova days the accelerometers sense accelerations in a sub-nano-g domain.

Regardless of extremely sensitive and stable sensors the accuracy of INS positioning is limited by inner and outer error sources, which together result in misalignment of the platform from a given coordinate system after some given time. Considering these misalignments in their total amount, the INS errors could be sorted in three groups:

- total gyro drift rate,

- total positioning error (errors in acceleration determination caused by the accelerometer errors and the orientation errors of the accelerometers due to the axis and the insufficient knowledge of the Earth's gravity field)
- orientation errors of the INS (alignment platform errors and changes caused by the rotation in the inertial space)

5 Forces that Affect the INS

The potential of the gravitation force in a point applied in the direction of the coordinate axis gives the components of the gravity acceleration in the axis direction at this point. For NED system we can write:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \\ g_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \\ g_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = g. \end{aligned} \quad (3)$$

The acceleration of the gravity g in a point is equal to the partial derivative of the potential W , after z in this point. The measurement of vertical accelerations and the determination of height (coordinate Z) are not as simple as the determination of the horizontal components (coordinates X and Y). The reason is that when measuring vertical acceleration the accelerometers register also the acceleration of gravity at the place where it is measured. Hence, for vertical measurements with INS it is necessary to determine the acceleration of gravity separately, or the local gravity field must be known.

5.1 Gravity is one of the most fundamental forces in the nature. We can express it as the force of attraction F between two bodies with masses m_1 and m_2 , at a distance r with the following expression:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} e_{12}, \quad (4)$$

where G is the universal gravitational constant ($6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$), and e_{12} is a unit vector in the direction of $m_1 m_2$. The gravitational acceleration of the mass m_2 due to m_1 expressed with the vector g is:

$$g = \frac{F}{m_2} = G \frac{m_1}{r^2} e_{12}. \quad (5)$$

The mean gravitational acceleration at the Earth's surface is about 9.81 m/s^2 . By approximation of the Earth with an ellipsoid the acceleration of gravity will be a function of geographic latitude φ . So the gravity changes according to the position on the Earth's surface. These variations, the normal gravity g_n can be described by the following equation, the so called "International formula", given in the GRS80:

$$g_n = 9,78032677(1 + 0,005279041 \sin^2 \varphi + 0,000023272 \sin^4 \varphi + 0,000000126 \sin^6 \varphi) \text{ ms}^{-2}$$

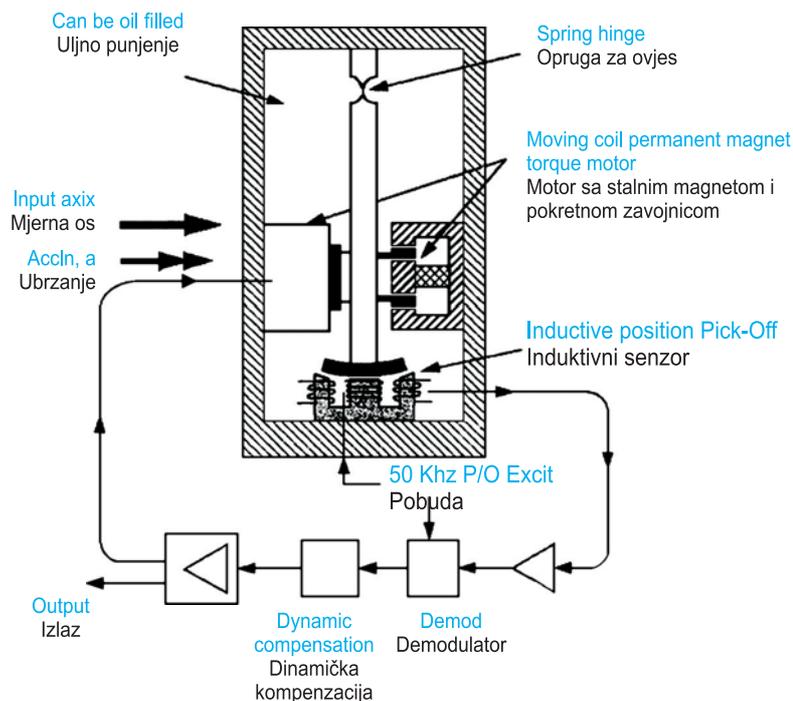


Fig. 11. Accelerometer with an inductive sensor

Sl. 11. Akcelerometar s induktivnim senzorom

nemaju pokretnih dijelova (*solid state*), već se kao korisni signal iz akcelerometara uzima struja potrebna da se uz pomoć povratne veze poništi sila koja djeluje na njihalo, sl. 11.

Za mjerenje ubrzanja nužno je da akcelerometri budu stabilizirani, a osi osjetljivosti budu orijentirane prema inercijalnoj orijentaciji. U novije doba akcelerometrima se mogu mjeriti ubrzanja u sub-nano-g području.

Unatoč vrlo osjetljivim i stabilnim sensorima točnost određivanja pozicije INS-om ograničena je unutarnjim i vanjskim utjecajima smetnji, koji se zajedno manifestiraju kao odstupanje platforme od zadanoga koordinatnog sustava nakon određenog vremena. Razmatra li se odstupanje u njegovu ukupnom iznosu, pogreške INS-a mogu se svrstati u tri skupine:

- ❑ ukupne pogreške žiroskopa (*gyro drift rate*)
- ❑ ukupna pogreška određivanja položaja (pogreške u određivanju ubrzanja zbog pogrešaka akcelerometara, nedovoljnog poznavanja gravitacijskog polja i pogrešaka u orijentaciji akcelerometara)
- ❑ pogreška orijentacije osi navigacijskog sustava (pogreške zbog navođenja platforme i promjene zbog rotacije u inercijalnom prostoru).

5. Sile koje djeluju na INS

Potencijal sile teže u nekoj točki diferenciran u smjeru koordinatnih osi daje komponente ubrzanja od sile teže u smjeru osi u toj točki, pa možemo za NED sustav napisati:

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = 0,$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$

$$g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = g.$$

(3)

Ubrzanje sile teže g u nekoj točki jednako je vrijednosti parcijalne derivacije potencijala W po z u toj točki. Upravo iz tog razloga mjerenje vertikalnih ubrzanja i iz njih određivanje visine (koordinata Z) nije tako jednostavno, kao što je to određivanje komponenti horizontalnih ubrzanja (koordinate X i Y). Razlog je tomu što kod mjerenja vertikalnih ubrzanja akcelerometri registriraju i djelovanje ubrzanja sile teže – gravitacije na mjestu mjerenja, pa je za mjerenje vertikalnih ubrzanja INS-om potrebno da se sila teža mjeri neovisno o ubrzanju (ili da je unaprijed poznata).

5.1. Gravitacija je jedna od osnovnih sila u prirodi. Može se iskazati kao sila privlačenja F između dvaju tijela s masama m_1 i m_2 na međusobnoj udaljenosti r izrazom:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} e_{12}, \quad (4)$$

Pritom je G univerzalna gravitacijska konstanta ($6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$), a e_{12} jedinični vektor u smjeru $m_1 m_2$. Prema tome gravitacijsko ubrzanje mase m_2 u odnosu na masu m_1 izraženo vektorom g može se prikazati izrazom:

Apart from that, gravity depends on the height h above the Earth. For simplicity reasons we approximate the Earth as a sphere with R as Earth's radius. Then we can write:

$$g_h = g_n \frac{R^2}{(R+h)^2} \tag{6}$$

In the seventies of the last century in the USA, after intensive usage of artificial satellites for geodetic applications, several prototypes for direct dynamic measurement of the second gravity differential called gradiometer were developed. The installation of gradiometers in airplanes (vehicle) with initial gravity data, velocity, position at time t_0 , enables on-line determination of gravity after passing some time t_1 .

Excellent results achieved with gradiometers in airplanes and satellites were not achieved at the Earth's surface. The reason is that the influence of topography is still present which in some cases can be several orders of magnitude bigger than the measured signal. But still, the extremely high price of such systems prevents its usage for civil purposes.

Besides normal gravity acceleration which changes with respect to latitude and height changes in inertial space, the INS is affected by forces which are generated from the Earth's rotation. These are the centrifugal force and the Coriolis's acceleration which can be determined with sufficient accuracy.

5.2 The centrifugal force, or its module F_c acts always with the radius r of related parallels, so we can write:

$$F_c = m r \Omega^2 \tag{7}$$

That means the module of the centrifugal force F_c is proportional to the mass m of a body, its distance r from the rotation axis and the second potential of the angle velocity of the Earth's rotation Ω .

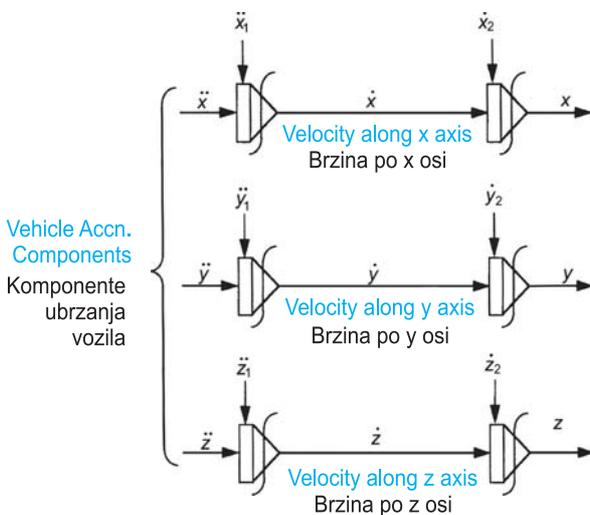


Fig. 12. Principle of inertial navigation
Sl. 12. Princip inercijalne navigacije

Since the rotation radius $r = 0$ on the poles, the centrifugal force does not exist. The biggest amount of the centrifugal force is at the equator of the Earth where the rotation radius is the biggest (about. 6370 km), and since the centrifugal force is directed opposite to the attraction force, the attraction at the equator is the smallest. All places at distances from the pole have smaller attraction than at the pole. These are so called normal variations which are for simplicity reasons calculated on a reference ellipsoid. In practise, normal gravitation and the height corrections over the approximated Earth are calculated by the "International formulas".

5.3 Coriolis's acceleration a_{cor} , arises from the movements of the platform in the inertial space and is equal to the vector product of the transfer angular velocity vector of the Earth's rotation $\Omega_{pre.}$ and the vector of the relative velocity of the vehicle $v_{rel.}$ in relation to the "stable" Earth, which can be expressed as follows:

$$a_{cor.} = 2\Omega_{pre.} \times v_{rel.} \tag{8}$$

6 Principles of X, Y, Z Position Determination with INS

The basic principle of inertial navigation can be best explained by Newton's second law of motion where the force F is equal to the product of mass and acceleration:

$$F = ma \tag{9}$$

where a is the acceleration vector, and m is the mass which is constant.

If we express the acceleration as a double derivation of the position radius vector R after time by substituting for $m = 1$, we can write:

$$F = \ddot{R} \tag{10}$$

Thus, from the measured components of the total acceleration $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$, along the three orthogonal axis (x, y, z) , after the first time-related integration it is possible to determine the components of velocity $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, along the axis. After the second time-related integration it is possible to determine the tumbled path, which means that it is possible to determine a new position after a double integration of the measured acceleration components if we know the coordinates at the beginning.

In Fig. 12, the principles of inertial navigation and position determination from double integration of measured acceleration components is shown in a simplified schematic way, after (Grozđanić 1999a).

In practice the inertial navigation is solved by analytical calculations of the coordinates of the momentary position of the vehicle. The coordinate differences of a referent point R_1 at time t_1 and the point R_2 , where the measuring platform is at time t_2 is obtained after a double integration of the measured data from the accelerometers:

$$R_2 - R_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{R} dt dt \tag{11}$$

$$g = \frac{F}{m_2} = G \frac{m_1}{r^2} e_{12}. \quad (5)$$

Prosječno ubrzanje sile teže na Zemljinoj površini iznosi oko 9,81 m/s². Aproximiramo li Zemlju elipsoidom, to će ubrzanje sile teže biti funkcija geografske širine φ (latitude), pa se ubrzanje s obzirom na mjesto na Zemlji, tzv. normalna vrijednost ubrzanja g_n može izračunati iz tzv. internacionalne formule. Prema sustavu GRS80 iznosi:

$$g_n = 9,78032677(1 + 0,005279041 \sin^2 \varphi + 0,000023272 \sin^4 \varphi + 0,000000126 \sin^6 \varphi) \text{ ms}^{-2}$$

Gravitacija je osim toga ovisna i o visini h iznad sfere (Zemlje), pa se pojednostavljeno, gdje je R Zemljin polumjer, može napisati:

$$g_h = g_n \frac{R^2}{(R+h)^2}. \quad (6)$$

Sedamdesetih godina prošlog stoljeća u SAD-u je intenzivnijom primjenom Zemljinih umjetnih satelita za geodetske namjene razvijeno nekoliko različitih mehaničkih prototipova uređaja za izravno dinamičko mjerenje drugog diferencijala sile teže, nazvanih gradiometrima. Ugradnja gradiometara u zrakoplov (vozilo), uz poznate početne uvjete sile teže, brzine i mjesta (pozicije) u trenutku t_0 , omogućuje online određivanje trenutne sile teže nakon protoka određenog vremena t_1 .

Odlični rezultati postignuti s gradiometrima u zrakoplovima i satelitima nisu postignuti na Zemljinoj površini jer je u tim mjerenjima i dalje ostao prisutan utjecaj topografije, koji može izazvati pogreške koje mogu biti reda veličine višekratnika mjernog signala. Ipak, posebna teškoća u primjeni tih uređaja je njihova iznimno visoka cijena, koja praktično isključuje njihovu primjenu u civilne svrhe.

Osim normalnog ubrzanja sile teže, koje se mijenja s promjenom visine i geografske širine, na INS u inercijalnom prostoru djeluju i sile koje nastaju zbog Zemljine rotacije, ali koje se mogu dovoljno točno odrediti. To su centrifugalna sila i Coriolisovo ubrzanje.

5.2. Centrifugalna sila, tj. njezin modul F_C , djeluje uvijek po polumjeru r pripadne paralele, pa možemo pisati:

$$F_C = m r \Omega^2. \quad (7)$$

To znači da je modul centrifugalne sile F_C jednak umnošku mase tijela m , njegove udaljenosti r od osi rotacije i kvadrata kutne brzine Zemljine rotacije Ω .

Kako je na Zemljinim polovima polumjer rotacije $r = 0$, centrifugalna sila ne djeluje. Najjače je djelovanje centrifugalne sile na ekvatoru, gdje je polumjer rotacije najveći (oko 6370 km), a kako je centrifugalna sila usmjerena suprotno sili privlačenja, to je na ekvatoru sila privlačenja najmanja. Sva mjesta udaljena od pola imaju stoga silu teže manju od sile privlačenja na polu. To su tzv. normalne promjene sile teže, koje se zbog pojednostavnjenja računaju na referentnom elipsoidu. Za određivanje normalne

vrijednosti gravitacijskog polja i korekcije za visinu nad referentnim elipsoidom u praksi se redovito koriste "internationalne formule".

5.3. Coriolisovo ubrzanje a_{cor} , nastaje zbog gibanja platforme u inercijalnom prostoru, a jednako je vektorskom produktu vektora prijenosne kutne brzine Zemljine rotacije i vektora relativne brzine vozila v_{rel} platforme u odnosu na "mirnu" Zemlju, što je izraženo jednadžbom:

$$a_{cor} = 2\Omega_{pre} \times v_{rel}. \quad (8)$$

6. Princip određivanja X, Y, Z pozicije INS-om

Osnovni princip rada INS-a može se objasniti prema drugom Newtonovu zakonu gibanja po kojem je sila F jednaka umnošku mase i ubrzanja:

$$F = ma, \quad (9)$$

gdje je a vektor ubrzanja, a m masa koja je konstantna.

Izrazi li se ubrzanje kao dvostruka derivacija radijvektora položaja R po vremenu, uz uvrštavanje $m = 1$, možemo pisati:

$$F = \ddot{R}. \quad (10)$$

Stoga će iz mjerenja komponenata ukupnog ubrzanja $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$, uzduž triju ortogonalnih osi (x, y, z) , nakon prve integracije po vremenu, biti moguće odrediti komponente brzine $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, uzduž tih osi. Nakon druge integracije po vremenu moguće je odrediti prevaljeni put, što znači da je uz poznate koordinate na početku moguće odrediti poziciju nakon dvostruke integracije mjerenih komponenata ubrzanja.

Na sl. 12 shematski je prikazan princip inercijalne navigacije određivanjem pozicije inercijalnog sustava iz dvostruke integracije izmjerenih komponenata ubrzanja (Grozđanić 1999a).

U praksi se rješenje inercijalne navigacije svodi na analitički način određivanja koordinata trenutne pozicije vozila. Pritom se razlike koordinata između neke referentne točke određene radijvektorom R_1 u trenutku t_1 do mjesta određenog radijvektorom R_2 , gdje se mjerni sustav nalazi u trenutku t_2 , dobivaju nakon dvostruke integracije mjerenih podataka iz akcelometara:

$$R_2 - R_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{R} dt dt. \quad (11)$$

Teškoća u primjeni tog izraza nastaje zbog toga što se inercijalni mjerni sustavi koji se koriste u vozilu nalaze u Zemljinu gravitacijskom polju, a akcelometri ne razlikuju sile koje nastaju relativnim gibanjem samih akcelometara od djelovanja sile teže. Ubrzanje koje akcelometri kod toga mjere često se u literaturi naziva "specifična sila" (iako bi to bilo korektnije zvati "specifično ubrzanje").

U inercijalnom referentnom koordinatnom sustavu "specifična sila" a_1 je vektorski zbroj inercijalnog ubrzanja



Fig. 13. Litton 251 INS (with FOG-s)

Sl. 13. INS uređaj LITTON 251 (s FOG žiroskopima)

268

The difficulty in the usage of this equation results from the fact that the inertial systems used in the vehicle are in the gravity field of the Earth, and the accelerometers can not distinguish the forces arising from relative movements of the accelerometers from the gravity acceleration. The acceleration measured by the accelerometers is often called “specific force” (although it would be correct to call it “specific acceleration”).

In an inertial reference coordinate system the “specific force” a_i is a vector sum of inertial acceleration for a unit mass, and a vector of the gravity acceleration g_i , in the direction of the plumb line:

$$a_i = \ddot{R}_i + g_i . \tag{12}$$

For the coordinate difference calculation in the inertial system this equation is not directly applicable, so one must take into account the forces generated from the

movements of the platform with a topocentric coordinate system (x_p, y_p, z_p) in relation to the inertial coordinate system (x_i, y_i, z_i) , (van den Herrewegen 1980).

The relation of accelerations in the inertial system in relation to the axis of the inertial platform can be expressed with a vector of the form:

$$\ddot{R}_i = C[\ddot{R}_p + (\dot{\Omega} \times R_p) + 2\Omega \times \dot{R}_p + \Omega \times (\Omega \times R_p)] , \tag{13}$$

where:

- \ddot{R}_i is the acceleration vector in inertial space,
- C is a matrix for the transformation from the topocentric system into the inertial system,
- \ddot{R}_p is the acceleration vector in relation to the platform axes (topocentric system),
- \dot{R}_p is the velocity vector with respect to the platform axes (topocentric system),
- R_p is the position vector with respect to the platform axes (topocentric system),
- Ω is the total angle velocity vector of the inertial platform (x_p, y_p, z_p) in relation to the inertial space (x_i, y_i, z_i) with components $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Some authors (Schwartz 1979, Farkas-Jandl 1986) write the following instead of the expression (13):

$$\ddot{R}_i = C[\ddot{R}_p + (\dot{\Omega} R_p) + 2\Omega \dot{R}_p + \Omega(\Omega R_p)] , \tag{14}$$

Which looks confusing at first. However, in the expression (14), Ω is not the total angle velocity as in formula (13), but an anti-symmetric matrix of the form:

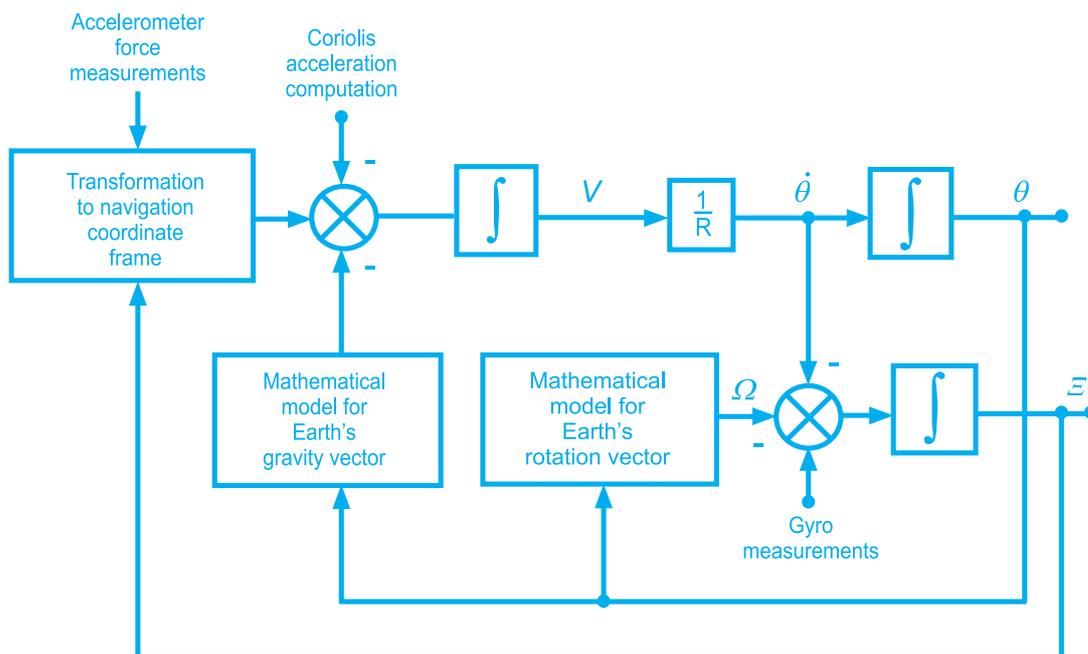


Fig. 14. Schematic diagram of land INS

sile za jediničnu masu i vektora ubrzanja sile teže g_p , koji predstavlja smjer djelovanja slobodno obješenog viska, izraženog u inercijalnom sustavu:

$$a_i = \ddot{R}_i + g_i. \quad (12)$$

Za račun koordinatnih razlika u inercijalnom referentnom sustavu taj se izraz ne može izravno primijeniti, jer se ubrzanja platforme mjere u topocentričnom sustavu. Stoga je potrebno uzeti u obzir sile koje nastaju zbog gibanja platforme topocentričnog koordinatnog sustava (x_p, y_p, z_p) u odnosu na inercijalni koordinatni sustav (x_i, y_i, z_i) (van den Herrewegen 1980).

Odnos ubrzanja u inercijalnom prostoru i ubrzanja u odnosu na osi inercijalne platforme mogu se izraziti vektorom, prema sljedećem izrazu:

$$\ddot{R}_i = C[\ddot{R}_p + (\dot{\Omega} \times R_p) + 2\Omega \times \dot{R}_p + \Omega \times (\Omega \times R_p)], \quad (13)$$

pri čem je

- \ddot{R}_i vektor ubrzanja u inercijalnom prostoru
- C transformacijska matrica za prelazak iz topocentričnog u inercijalni koordinatni sustav
- \ddot{R}_p vektor ubrzanja u odnosu na osi inercijalne platforme (topocentrični sustav)
- \dot{R}_p vektor brzine u odnosu na osi inercijalne platforme (topocentrični sustav)
- R_p vektor položaja (platforme) u odnosu na osi inercijalne platforme
- Ω vektor totalne kutne brzine inercijalne platforme (x_p, y_p, z_p) u odnosu na inercijalni prostor (x_i, y_i, z_i) s komponentama $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Neki autori (Schwartz 1979, Farkas-Jandl 1986) umjesto izraza (13) pišu ovako:

$$\ddot{R}_i = C[\ddot{R}_p + (\dot{\Omega} R_p) + 2\Omega \dot{R}_p + \Omega(\Omega R_p)], \quad (14)$$

što je na prvi pogled zbunjujuće. Međutim, u izrazu (14) Ω nije vektor totalne kutne brzine, kao što je u formuli (13), nego je antisimetrična matrica oblika:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Ako se to uoči onda su oba zapisa (13) i (14) jednako dobra.

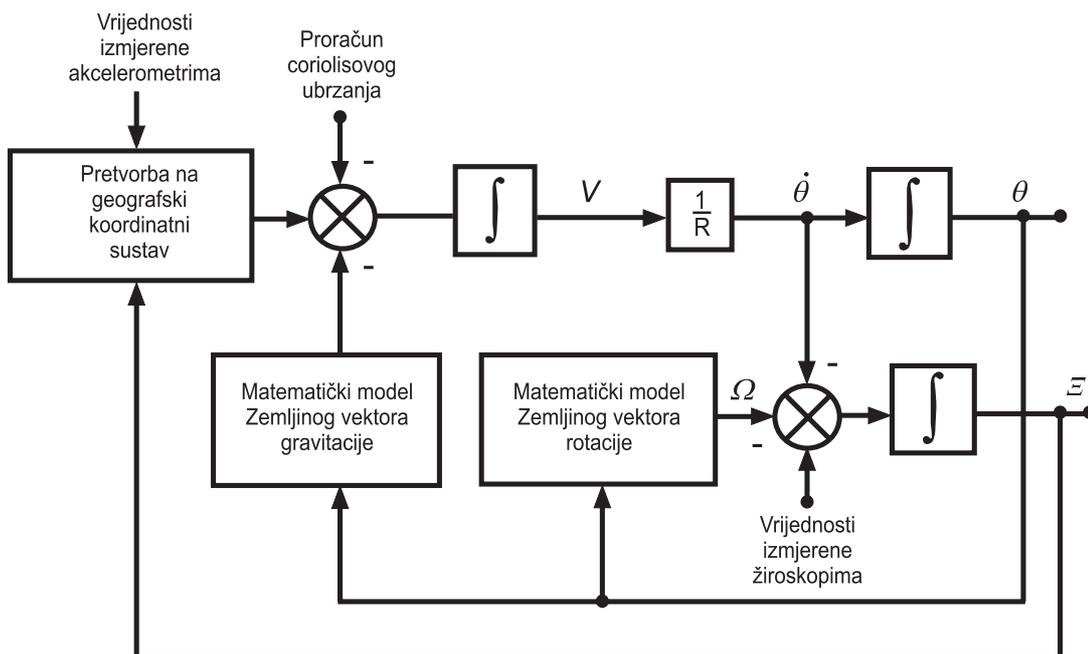
Uvrštavanjem jednadžbe (13) u jednadžbu za "specifičnu silu" dobiva se opća jednadžba gibanja:

$$a_i = C[\ddot{R}_p + (\dot{\Omega} \times R_p) + 2\Omega \times \dot{R}_p + \Omega \times (\Omega \times R_p) + g_p]. \quad (16)$$

U tom je izrazu uočljivo Coriolisovo ubrzanje $2\Omega \times \dot{R}_p$ i centrifugalno ubrzanje $\Omega \times (\Omega \times R_p)$. Vektor je ubrzanje sile teže g_p bez centrifugalnog ubrzanja (Schödlbauer 1985).

U literaturi (Schwartz 1979, van den Herrewegen 1980, Schödlbauer 1985, Farkas-Jandl 1986) moguće je naći formule za komponente vektora a_i . Na temelju tih formula mogu se dobiti tzv. „mehanizacijske jednadžbe“ iz kojih se mogu odrediti brzine (v_x, v_y, v_z) uzduž osi platforme iz početnih koordinata (φ, λ, h).

Na sl. 13 prikazan je INS model Litton 251 s FOG žiroskopima, koji se koristi u zrakoplovima, a na sl. 14 je blok dijagramom prikazan princip inercijalnog navigacijskog sustava za vozila (Grozđanić 1999a).



Sl. 14. Blok dijagram INS-a za vozila

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

If we note that, then both expressions, (13) and (14), are equally good.

By substituting the equation (13) into the “specific force” equation, we get the general equation of motion

$$a_i = C[\ddot{R}_p + (\dot{\Omega} \times R_p) + 2\Omega \times \dot{R}_p + \Omega \times (\Omega \times R_p) + g_p]. \quad (16)$$

In this expression the Coriolis's acceleration is $2\Omega \times \dot{R}_p$ and the centrifugal acceleration is $\Omega \times (\Omega \times R_p)$.

Vector g_p is gravity acceleration without centrifugal acceleration (Schödlbauer 1985).

In references (Schwartz 1979, van den Herrewegen 1980, Schödlbauer 1985, Farkas-Jandl 1986), it is possible to find formulae for vector a_i components. On the basis of these formulae, it is possible to get the so-called „mechanization equations“ from which velocities (v_x, v_y, v_z) along the platform axes from initial coordinates (φ, λ, h) can be determined.

In Fig. 13 the Litton FOG model 251 is shown, and in Fig. 14 the principles of a land inertial system after (Grozđanić 1999a) in a schematic diagram is shown.

The symbols in the diagram are:

- $\dot{\theta}$ is the calculated angle velocity of position change θ over the Earth,
- R is the local radius of the Earth,
- V is the calculated platform velocity,
- Ω is the angle velocity of the Earth's rotation,
- \mathcal{E} is the calculated orientation of the accelerometer axis in relation to the reference coordinate system.

7 Difficulties in the INS Application and Conclusion

Since the INS gives discrete values of position, the calculated position and the current position of the vehicle

make it possible to use sophisticated algorithms as Kalman filter to extrapolate and predict the new position of the vehicle which will appear later, (Grozđanić 1999b), King 1998, Stovall 1977). But the early mentioned disturbing influences which we register with the INS and which we can not eliminate separately, can be eliminated altogether as a resultant by using mathematical models.

Besides insufficient knowledge of the Earth's local gravity anomalies there are first the “mechanic influences”. The usage of precise global digital models of the Earth's gravity field will in the future be available also for civil purposes. However, the accuracy limit will still be the error sources as gyro drift rate and scale factor errors, perpendicular orientation errors of the accelerometers and the misalignments of the accelerometers in relation to the gyro axis.

Since the most error sources effects are summing or integrating over time, very precise determination of coordinates in short intervals has become inadmissible in long time periods. Therefore the calculated current position of the vehicle must be corrected in regular time intervals using other geodetic positioning methods like GNSS. Certainly, both of these positioning methods in combination will become a rule because even today both methods give comparable results and the methods are ideally implemented (Schwarz 2000).

In order to provide long term stability, increasing sensitivity and dimensional decreasing, the INS instruments are still intensively developed.

According to difficulties in positioning using modern GNSS methods in bad signal reception conditions or with total signal drop out, for instance under the Earth's surface or under water, that means in mining, tunnelling, or for military applications, the potential of the INS can clearly be foreseen.

Acknowledgements

The author is thankful to Prof. Dr. Miljenko Solarić and Prof. Dr. Asim Bilajbegović for carefully reading the manuscript of the paper and very useful suggestions.

Simboli u dijagramu označuju:

- $\dot{\theta}$ izračunanu kutnu brzinu promjene nagiba (nagibanje platforme)
 R lokalni polumjer Zemljine zakrivljenosti
 V izračunatu brzinu (platforme)
 Ω kutnu brzinu Zemljine rotacije
 \mathcal{E} izračunanu orijentaciju osi akcelerometara u odnosu na geografski koordinatni sustav.

7. Poteškoće u primjeni INS-a i zaključak

Kako INS-i daju diskretne vrijednosti pozicija to je iz već izračunanih i iz trenutne pozicije vozila moguće složenim matematičkim algoritmima, kao na pr. Kalmanovim filtrom ekstrapolirati i predvidjeti novu poziciju vozila, koja će tek uslijediti (Grozđanić 1999 b, King 1998, Stovall 1997). No, uz prije navedene utjecaje koje registriamo INS-om, na mjerni sustav djeluju još i utjecaji koje je pojedinačno nemoguće egzaktno odrediti, pa se uz primjenu odgovarajućih matematičkih modela te pogreške uklanjaju u ukupnom iznosu. Uz nedovoljno dobro poznavanje polja sile teže i lokalnih anomalija, to su prije svega "mehanički" utjecaji. Primjena globalnih digitalnih modela polja Zemljine gravitacije zasigurno će u budućnosti biti dostupna i u civilne svrhe. No i dalje će točnost INS-a ograničavati izvori pogrešaka izazvanih nestabilnošću

žiroskopa, tzv. "gyro drift rate", pogreškom skale i mjerila akcelerometara, pogrešaka zbog neokomitosti osi akcelerometara i pogrešaka orijentacije akcelerometara u odnosu na žiroskope. Kako se većina utjecaja tih izvora pogrešaka s vremenom zbraja, to vrlo precizna određivanja pozicija vozila INS-om u kratkim vremenskim intervalima postaju nedopustivo velika, ako se mjeri kroz duži vremenski period. Stoga je izračunanu trenutnu poziciju vozila potrebno u pravilnim vremenskim intervalima korigirati egzaktnim podacima povremenih mjerenja nekom drugom geodetskom metodom, kao što je npr. GNSS. Zasigurno će taj princip kombinacije dviju metoda pozicioniranja i navigacije postati pravilo, jer se danas obim metodama postižu usporedive točnosti, koje se idealno nadopunjuju (Schwarz 2000, King 1998). Prvenstveno radi osiguranja dugotrajne stabilnosti, povećanja osjetljivosti senzora i smanjenja dimenzija mjernih uređaja INS-i su još uvijek u fazi intenzivnog razvoja.

S obzirom na poteškoće kod pozicioniranja koristeći suvremene GNSS metode u uvjetima lošeg prijama i potpunog izostanka signala, npr. ispod površine Zemlje ili vode, dakle u rudarstvu, tunelogradnji, te za vojne namjene, uočljiv je značajni potencijal INS-a.

Zahvala

Zahvaljujem prof. dr. sc. Miljenku Solariću i prof. dr. sc. Asimu Bilajbegoviću na trudu uloženom u čitanje rukopisa ovoga rada i vrlo korisnim primjedbama.

References / Literatura

- Caspary, W., H. Heister, Chr. Hock, J. Klemm, H. Sternberg (1995): The kinematic Surveying system KiSS - Design; Mechanization, Application, The Fourth International Conference on Differential Satellite Navigation Systems, Bergen.
- Brunner, F. K., E. Grillmayer (2002): On the Temperature Dependence of Gyroscopic Measurements Using the Gyromat 2000, FIG, Proceedings of the XXII International Congress Washington, D. C. USA, April 19-26, 2002.
- Grozđanić, B., R. Marjanović Kavanagh, B. Popović (1999a): Possibility of aircraft height determination by means of inertial navigation systems, International Conference on Traffic Science '99, Portorož.
- Grozđanić, B., R. Marjanović Kavanagh, B. Popović (1999b): Aplikacije mjerenja vertikalnih ubrzanja u inercijalnim navigacijskim sustavima, 8th International symposium on electronic in traffic - ISEP '99, Ljubljana.
- Heister, H., A. Schödelbauer (1990): Comparison of Automated Gyrotheodolites. FIG, Proceedings of the XIX International congress, Helsinki, Finland.
- King, A. I., K. W. Krieger, A. J. Padgaonkar (1975): Measurement of Angular Acceleration of a Rigid Body Using Linear Accelerometers. Transactions of the ASME.
- King, A. D. (1998): Inertial Navigation - Forty Years of Evolution. GEC Review, Vol. 13, No. 3.
- Stovall H. S. (1997): Basic Inertial Navigation. Naval Air Warfare Center Weapons Division, China Lake, California 93555-6100.
- Schwarz, Kl. P., N. El-Sheimy (2000): Kinematic Geodetic Software for Position and Attitude Determination, KINGSPAD Manual, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary.
- Schwarz, Kl. P. (1979): Grundgleichungen und Fehlermodelle für inertielle Meßsysteme. ZfV, Nr. 10.
- Van den Herrewegen, M. (1980): Practical results with the "FILS" inertial surveyor. Publication of the GNI.