

Original Scientific Paper
Received: 09-07-2010
Accepted: 15-11-2010

The Best Conic Conformal Map Projection for the Territory of Croatia

24

Marina RAJAKOVIĆ and Miljenko LAPAINE

Faculty of Geodesy, University of Zagreb, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, Croatia

mlapaine@geof.hr

Abstract: *The paper gives an answer to the question: if the maritime area of Croatia (territorial sea and continental shelf) is involved, which is the best Lambert conic conformal map projection for the territory of Croatia? Numerical realization demanded the northernmost and the southernmost coordinates on the land and sea of Croatia. Since the coordinates of the southernmost point on the sea, i.e. those on the line of the continental shelf, had never been calculated before, it had to be done in this work. Thereafter eight variants of conic conformal map projections with respect to the distribution of linear distortions were analyzed. Each variant was clearly defined, and they differ in the constants of projection which were obtained by setting initial conditions. On the basis of performed research the best Lambert conic conformal map projection for the territory of Croatia including its territorial sea and continental shelf was proposed.*

Key words: *Lambert conic conformal map projection, standard parallel, distortions, Croatia*

1. Introduction

The basic principles of conic conformal map projection were set by Johann Heinrich Lambert in 1772. According to his achievements, these projections are called *Lambert conic conformal map projections*. In the third part of his *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* (Contributions to the Usage of Mathematics and its Application, 1772) called *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* (Remarks and Additions to the Establishment of Land and Sky Maps), Lambert describes projecting a sphere and spheroids onto a plane. Thus, according to Frischauf (1905), Deetz and Adams (1934), Snyder (1993), Lapaine and A. Kuveždić (2007) and others, Lambert can be considered the originator of the general map projection theory. His predecessors only researched individual projections, while Lambert studied the problem of mapping a surface into a plane from a more general viewpoint and mathematically expressed certain general conditions which have to be met by mapping. The most important of those conditions are preservation of angles, i.e. conformality

Izvorni znanstveni rad
Primljeno: 09-07-2010.
Prihvaćeno: 15-11-2010.

Najbolja konformna konusna projekcija za Hrvatsku

Marina RAJAKOVIĆ i Miljenko LAPAINE

Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 10000 Zagreb

mlapaine@geof.hr

25

Sažetak: U radu se daje odgovor na pitanje: koja je najbolja Lambertova konformna konusna projekcija za Hrvatsku ako se u područje preslikavanja uključi i morski dio Hrvatske (teritorijalno more i epikontinentalni pojas)? Numerička realizacija rada zahtjevala je koordinate najsjevernije i najjužnije točke Hrvatske, kako na kopnu tako i na moru. Utvrđeno je da koordinate najjužnije točke Hrvatske na moru, tj. one na crti epikontinentalnog pojasa nisu dosad točno izračunane, pa je to trebalo napraviti. Zatim je analizirano osam varijanti konformnih konusnih projekcija s obzirom na raspored linearnih deformacija. Svaka je varijanta jasno definirana, a one se međusobno razlikuju po konstantama projekcije koje su dobivene na temelju postavljenih početnih uvjeta. Na temelju provedenih istraživanja predložena je najbolja Lambertova konformna projekcija za područje Hrvatske uključujući njezino teritorijalno more i epikontinentalni pojas.

Ključne riječi: Lambertova konformna konusna projekcija, standardna paralela, deformacije, Hrvatska

1. Uvod

Osnovne principe konformnih konusnih projekcija postavio je 1772. godine Johann Heinrich Lambert, pa se po njemu te projekcije nazivaju *Lambertove konformne konusne projekcije*. U trećem dijelu njegovih *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* (Doprinosi uporabi matematike i njezine primjene, 1772), pod nazivom *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* (Napomene i dopune za snimanje karata zemljišta i neba), Lambert opisuje preslikavanje sfere i sferoida u ravninu, pa se prema Frischhaufu (1905), Deetzu i Adamsu (1934), Snyderu (1993), Lapaineu i A. Kuveždić (2007) i drugima, može smatrati začetnikom opće teorije kartografskih projekcija. Njegovi prethodnici ograničavali su se na istraživanje pojedine projekcije, dok je Lambert promatrao problem preslikavanja plohe u ravninu s općenitijeg stajališta i matematički izrazio određene opće uvjete koje preslikavanje mora zadovoljiti. Najvažniji od tih uvjeta su čuvanje kutova ili konformnost i čuvanje površina ili ekvivalentnost.

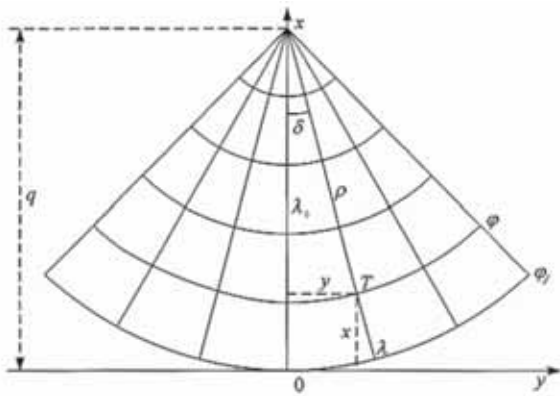


Fig. 1. Coordinate system in normal conical projections

Slika 1. Koordinatni sustav u uspravnim konusnim projekcijama

Shape of the function f depends on whether it is conformal, equivalent or equidistant projection.

Connection between polar and rectangular coordinates is given as:

$$x = q - \rho \cos \delta,$$

$$y = \rho \sin \delta,$$

where q is a radius of the parallel with the least latitude of the projected area (Fig. 1). The x -axis of the rectangular coordinate system coincides with the polar coordinate axis. The origin is the intersection of the southernmost parallel and central meridian in the plane of projection (Fig. 1).

The formulae for a linear scale factor along the meridian and parallel can be found in literature (e. g. Frančula 2004). The scale factor along the meridian is:

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M}$$

while the scale factor along the parallel is: $n = \frac{\sqrt{G}}{r}$.

In the previous formulae E and G are Gauss fundamental (basic) first order quantities, M is the radius of curvature of the meridian ellipse, N is the radius of curvature of section along first vertical while r is the radius of the parallel which is calculated using an expression:

$$r = N \cos \varphi.$$

Required partial derivations are:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \delta, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \sin \delta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = k\rho \sin \delta, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = k\rho \cos \delta,$$

thus

$$E = \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2, \quad G = k^2 \rho^2$$

and finally

$$m = -\frac{d\rho}{Md\varphi}, \quad n = \frac{k\rho}{r}.$$

Due to conformality,

$$-\frac{d\rho}{Md\varphi} = \frac{k\rho}{r}$$

from which we determine $\rho = f(\varphi)$.

and area preservation, i.e. equivalence. Although Lambert did not fully develop a theory of such mappings, he was the first to express those ideas in a clear manner.

26

The importance of Lambert conic conformal map projection for Croatia is visible in *Decree on Establishing New Official Geodetic Datums and Planar Map Projections of the Republic of Croatia*. On August 4, 2004 Government of the Republic of Croatia determined the coordinate system of normal Lambert conformal conic projection, with standard parallels 43°05' and 45°55' north, as coordinate system of the Republic of Croatia for small scale official maps (Narodne novine 110/2004). Small linear distortions, good preservation of surface shapes and universality of its usage are main reasons of its suggestion for small scale official maps. This projection for Croatia is based on the ellipsoid GRS80. According to the norm ISO 1911 for this projection system was decided an abbreviation HTRS96/LCC (URL1).

In normal conical projections meridians are mapped as straight lines that intersect at angles proportional to differences of their longitudes. Parallels are mapped as arcs of the concentric circles centred at the intersection of the meridians. To show the interested area in the plane it is necessary to define relationship between geodetic coordinates φ and λ on the ellipsoid or sphere and the coordinates in the plane. Polar angle δ and polar radius ρ are used as the plane coordinates in the conical projection (Fig. 1).

The general equations of normal conical projection in polar coordinates are defined from Fig. 1:

$$\rho = f(\varphi),$$

$$\delta = k(\lambda - \lambda_0),$$

where k is proportionality constant, λ is longitude and λ_0 is longitude of the central meridian of the projected area.

Iako Lambert nije u cijelosti razvio teoriju takvih preslikavanja, bio je prvi koji je jasno izrazio navedene ideje.

Važnost Lambertove konformne konusne projekcije za Hrvatsku vidljiva je iz *Odluke o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i ravninskih kartografskih projekcija Republike Hrvatske*. U njoj je Vlada Republike Hrvatske 4. kolovoza 2004. propisala da koordinatni sustav uspravne Lambertove konformne konusne projekcije, sa standardnim paralelama $43^{\circ}05'$ i $45^{\circ}55'$, bude projekcijski koordinatni sustav Republike Hrvatske za područje pregledne državne kartografije (Narodne novine 110/2004). Male linearne deformacije, dobro očuvanje oblika i univerzalnost njezine uporabe glavni su razlozi zbog kojih je predložena kao službena projekcija za preglednu državnu kartografiju. Ta se kartografska projekcija za Hrvatsku temelji na elipsoidu GRS80. Sukladno normi ISO 19111 za taj projekcijski sustav određena je oznaka HTRS96/LCC (URL 1).

U uspravnim konusnim projekcijama meridijani se preslikavaju kao pravci koji se sijeku pod kutovima proporcionalnim razlikama njihovih geografskih dužina. Paralele se preslikavaju kao lukovi koncentričnih kružnica sa središtem u presjeku meridijana. Da bi se željeno područje prikazalo u ravnini potrebno je definirati vezu između geodetskih koordinata φ i λ na elipsoidu ili na sferi i koordinata u ravnini. Za polarne koordinate u ravnini uzima se kod konusnih projekcija polarni kut δ i polarni polumjer ρ (slika 1).

Sa slike 1 određuju se opće jednadžbe uspravnih konusnih projekcija u polarnim koordinatama:

$$\rho = f(\varphi),$$

$$\delta = k(\lambda - \lambda_0),$$

gdje je k konstanta proporcionalnosti, λ geodetska dužina i λ_0 geodetska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja.

Oblik funkcije f dobiva se ovisno o postavljenim uvjetima preslikavanja, obično o uvjetu konformnosti, ekvivalenosti ili ekvidistantnosti.

Povezanost između polarnih i pravokutnih koordinata dana je sljedećim izrazima:

$$x = q - \rho \cos \delta,$$

$$y = \rho \sin \delta,$$

gdje je q polumjer paralele s najmanjom geodetskom širinom za odabrano područje preslikavanja (slika 1). Os x pravokutnoga koordinatnog sustava podudara se s osi polarnih koordinata, a ishodište je presjek najjužnije paralele i srednjega meridijana u projekciji (slika 1).

Formule za linearno mjerilo u smjeru meridijana i u smjeru paralela mogu se naći u literaturi (npr. Frančula 2004), pa je tako mjerilo u smjeru meridijana:

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M},$$

a mjerilo u smjeru paralele: $n = \frac{\sqrt{G}}{r}$.

U prethodnim formulama E i G su Gaussove fundamentalne (osnovne) veličine prvoga reda, M je polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse, N je polumjer zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu dok je r polumjer paralele koji se računa prema izrazu:

$$r = N \cos \varphi.$$

Potrebne parcijalne derivacije jesu:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \delta, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \sin \delta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = k\rho \sin \delta, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = k\rho \cos \delta,$$

pa je

$$E = \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2, \quad G = k^2 \rho^2$$

i konačno

$$m = -\frac{d\rho}{Md\varphi}, \quad n = \frac{k\rho}{r}.$$

Iz uvjeta konformnosti slijedi

$$-\frac{d\rho}{Md\varphi} = \frac{k\rho}{r}$$

odakle određujemo $\rho = f(\varphi)$.

Uvrste li se u prethodnu jednadžbu izrazi za r , M i N , ona se može napisati u obliku

$$-\frac{d\rho}{\rho} = k \frac{M}{N} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = k \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)} \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

odakle nakon integriranja dobivamo

$$\ln \rho = -k \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + ke \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right) + \ln K,$$

gdje je K konstanta integracije, a ψ funkcija širine određena izrazom $\sin \psi = e \sin \varphi$. Prethodnu jednadžbu može se napisati u jednostavnijem zapisu

If expressions for r , M and N are put into the previous equation, it can be written as

$$\frac{d\rho}{\rho} = k \frac{M}{N} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = k \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2\varphi)} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

After integrating, we get

$$\ln\rho = -k \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) + ke \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\psi}{2}) + \ln K,$$

where K is the integration constant, and ψ is the function of latitude determined with the expression $\sin\psi = e \sin\varphi$. The previous equation can be written in a simpler form, as

$$\rho = \frac{K}{U^k},$$

where

$$U = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg}^e(45^\circ + \frac{\psi}{2})}$$

Thus, formulae of normal aspect conformal conic projections are (Frančula 2004):

$$\delta = k(\lambda - \lambda_0),$$

$$\rho = \frac{K}{U^k},$$

$$U = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg}^e(45^\circ + \frac{\psi}{2})},$$

$$\sin\psi = e \sin\varphi.$$

$$x = q - \rho \cos\delta,$$

$$y = \rho \sin\delta,$$

$$m = n = \frac{k\rho}{rU^k}, \quad \rho = m^2, \quad \omega = 0.$$

In the previous formulae, p is the area scale, and ω is the maximum angle deformation. The formulae contain two constants, k and K , which are determined according to various conditions.

Lambert conformal conic projection with two standard parallels ($43^\circ 05'$ and $45^\circ 55'$), which was determined as coordinate system for small scale official maps (scales 1:500 000 or smaller) was selected on the basis of deformation distribution of the continental part of Croatia. If the maritime area of Croatia (territorial sea and continental shelf) is involved, the question arises: wath is the best Lambert conic conformal map projection for the territory of Croatia?

Considering each map projection is "the best" in a sense, it is necessary to define what "the best projection" means. Since we are dealing with conformal projections,

those without angle distortions and with area scale equal to square of linear scale, it is sufficient to set a criterion for linear distortions. One of the possibilities, which is selected in this paper, is that extreme linear distortions are as small as possible. In other words, we are going to be pleased with a projection whose greatest linear distortions are the smallest. In addition, approaching the problem is not going to be exact, as it was in papers by Tutić (2008, 2009); we are going to select the most suitable projection among several variants. In the end, the result is going to be almost optimal.

2. Previous Calculations

The discussion was started by defining interested area. State Borders Department of the State Geodetic Administration gave the northernmost, southernmost, easternmost and westernmost coordinates of the Croatian continental territory. The coordinates of the southernmost point on Croatian state border (what is also a border of the territorial sea) and continental shelf (what is not a state border, but it is the demarcation line to Italy) were also given (DGU 2008).

The southernmost point of Croatian sea, which is marked as point 4 in the Fig. 2, matches the point 43 on the line of the continental shelf (Službeni list SFRJ, 28/1970; Rudolf 1976). The question is: Is this the southernmost point of Croatian sea? In the article 6 of *Protocol Between the Government of the Republic of Croatia and the Federal Government of the Federal Republic of Yugoslavia About Temporary Regime for the South Boundary Between the two Countries*, signed on December 10, 2002, is declared different (URL2):

"Article 6.

A temporary boundary of territorial sea begins at the point which is located 3 cables away from Cape Oštro on the line Cape Oštro – Cape Veslo and continues on the straight line 12 nautical miles with azimuth of 206° to the open sea."

The topographic map at the scale 1:25 000 and the chart at the scale 1:100 000 in the supplement of the Protocol are not available to public. We would like to point out that the Protocol has not been ratified yet (December 2010). Therefore, all calculations and data within conducted research described in this paper have a purely theoretical meaning.

Several issues come up after reading article no. 6. What is a straight line? Which projection is the cited text referring to? How does the "straight line" continue in the continental shelf?

Considering we were unable to find answers to these questions, we assumed the straight line refers to the geodetic line, which is technically neither a straight nor a rhumb line, but is very close to them at smaller distances.

$$\rho = \frac{K}{U^k},$$

gdje je označeno

$$U = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg}^\rho(45^\circ + \frac{\psi}{2})}.$$

Prema tome formule uspravnih konformnih konusnih projekcija jesu (Frančula 2004):

$$\delta = k(\lambda - \lambda_0),$$

$$\rho = \frac{K}{U^k},$$

$$U = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg}^\rho(45^\circ + \frac{\psi}{2})},$$

$$\sin \psi = e \sin \varphi.$$

$$x = q - \rho \cos \delta,$$

$$y = \rho \sin \delta,$$

$$m = n = \frac{k\rho}{rU^k}, \quad \rho = m^2, \quad \omega = 0.$$

U prethodnim formulama s p je označeno mjerilo površina, a s ω maksimalna deformacija kuta. U navedenim formulama pojavljuju se dvije konstante k i K koje određujemo pod raznim uvjetima.

Lambertova konformna konusna projekcija s dvije standardne paralele ($43^\circ 05'$ i $45^\circ 55'$), koja je uzeta kao službena kartografska projekcija u Hrvatskoj za pregledne topografske karte u mjerilu 1:500 000 i sitnijim mjerilima, izabrana je na temelju ispitivanja raspodjele deformacija samo za kopneni dio Hrvatske. Postavlja se prirodno pitanje koja bi bila "najbolja" Lambertova konformna konusna projekcija, ako se u razmatranje uzme i morsko područje Hrvatske (uključujući teritorijalno more i epikontinentalni pojas)?

Budući da je svaka kartografska projekcija "najbolja" u nekom smislu, potrebno je precizirati što se pod "najbolja projekcija" misli. Budući da razmatramo konformne projekcije, a to su one kod kojih nema deformacija kutova i kod kojih je mjerilo površina jednako kvadratu linearnog mjerila, dovoljno je postaviti neki kriterij na deformacije duljina. Jedna je od mogućnosti, koju ćemo odabrati u ovome radu, da ekstremne linearne deformacije budu što manje. Drugim riječima, bit ćemo zadovoljni onom projekcijom za koju su najveće linearne deformacije najmanje. Dodajmo tome da pristup problemu neće biti egzaktni, kao što je npr. u radovima Tutića (2008, 2009), nego ćemo između nekoliko varijanti projekcije odabrati najpovoljniju. Na kraju će se pokazati da je dobiveni rezultat gotovo optimalan.

2. Prethodna računanja

Razmatranje je započeto definiranjem područja istraživanja. Odjel za državne granice pri Državnoj geodetskoj upravi (DGU) ustupio nam je podatke o najsjevernijoj, najjužnijoj, najistočnijoj i najzapadnijoj točki na hrvatskome kopnu. Također, dobivene su i koordinate najjužnije točke na moru, kako na državnoj granici (što je ujedno granica teritorijalnog mora), tako i na epikontinentalnom pojasu (što nije državna granica u užem smislu, ali je crta razgraničenja prema Italiji) (DGU 2008).

Za najjužniju točku Hrvatske na moru, koja je označena kao točka 4 na slici 2, dobivene su od DGU zapravo koordinate točke 43 na crti epikontinentalnog pojasa (Službeni list SFRJ 28/1970, Rudolf 1976), pa se postavilo pitanje je li to zaista najjužnija točka Hrvatske na moru. Naime, u članku 6 *Protokola između Vlade Republike Hrvatske i Savezne Vlade Savezne Republike Jugoslavije o privremenom režimu uz južnu granicu između dviju država*, koji je potpisan 10. 12. 2002., stoji (URL 2):

“Članak 6.

Privremeno razgraničenje teritorijalnog mora započinje u točki udaljenoj 3 kabela od rta Oštro na spojnici rt Oštro – rt Veslo te se nastavlja ravnom crtom 12 nautičkih milja azimutom 206° do otvorenog mora.”

Topografska karta u mjerilu 1:25 000 i pomorska karta u mjerilu 1:100 000 koje se nalaze u prilogu Protokola i njegov su sastavni dio, nisu dostupne javnosti. Napominjemo da Protokol do danas (prosinac 2010.) nije službeno ratificiran. Zbog toga, sva računanja u sklopu obavljenih istraživanja opisanih u ovome radu i podaci objavljeni u ovome radu imaju samo teorijsko značenje.

Nakon čitanja spomenutoga članka 6 prirodno se postavlja nekoliko pitanja. Što se misli pod ravnom crtom? Na koju se projekciju odnosi citirani tekst? Kako se “ravna crta” nastavlja u epikontinentalnome pojasu?

Budući da odgovore na postavljena pitanja nismo mogli dobiti, pretpostavili smo da se pod ravnom crtom podrazumijeva geodetska linija koja strogo gledano nije ni ravna crta ni loksodroma, ali im je na kraćim udaljenostima vrlo bliska. Potrebna računanja napravljena su u Gauss-Krügerovoj projekciji i radi kontrole na elipsoidu GRS80.

2.1. Računanje koordinata najjužnije točke Hrvatske na crti epikontinentalnoga pojasa

Na temelju članka 6 *Protokola između Vlade Republike Hrvatske i Savezne Vlade Savezne Republike Jugoslavije o privremenom režimu uz južnu granicu između dviju država* obavljena su potrebna računanja te su izračunane koordinate točke T koja se nalazi na udaljenosti 3 kabela (555,60 m) od rta Oštro na spojnici rt Oštro - rt Veslo (slika 3). Koordinate rta Oštro i rta Veslo pruzete su iz članka 5 navedenoga *Protokola*.

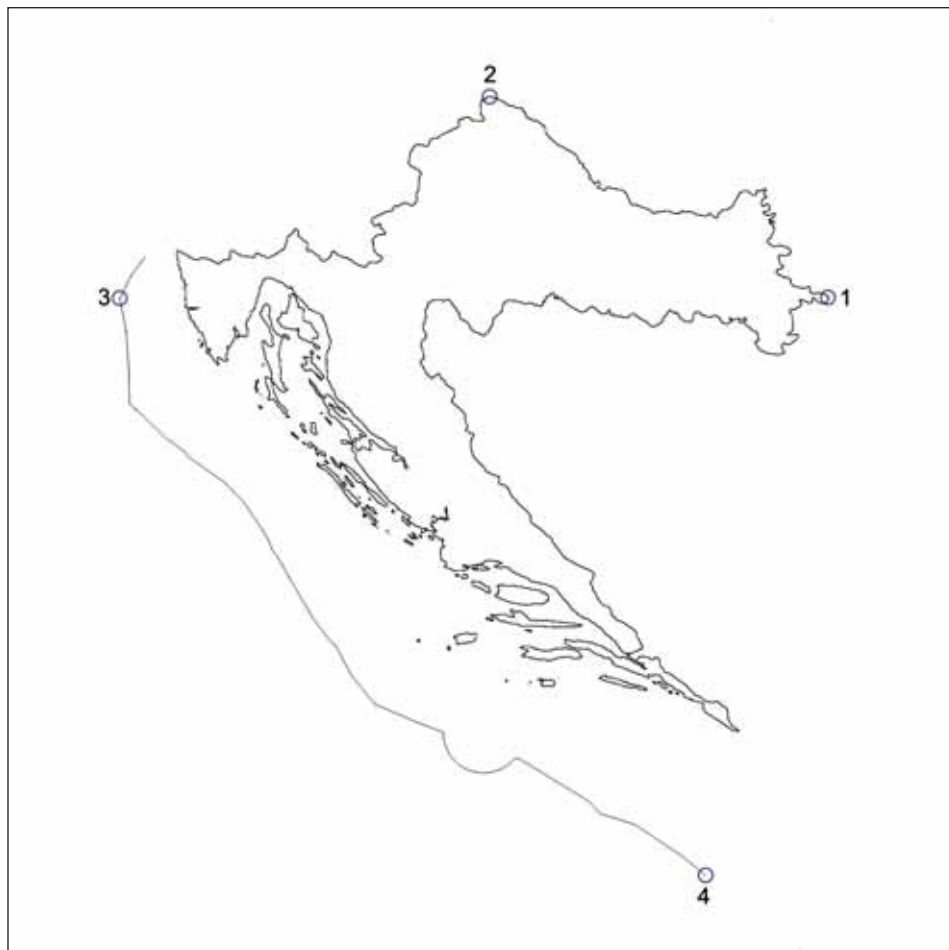


Fig. 2. The northernmost, southernmost, easternmost and westernmost point of the Croatia according to the data which was given by State Geodetic Administration

Slika 2. Prikaz najsjevernije, najjužnije, najzapadnije i najistočnije točke Hrvatske prema podacima dobivenima u Državnoj geodetskoj upravi

Required calculations were done in the Gauss-Krüger projection and on the GRS80 ellipsoid for control.

2.1. Calculating the southernmost coordinates of the Croatian continental shelf

According to the article 6 of *Protocol Between the Government of the Republic of Croatia and the Federal Government of the Federal Republic of Yugoslavia About Temporary Regime for the South Boundary Between the two Countries* necessary calculations were performed and coordinates of the point T, which is located 3 cables (555.60 meters) away from Cape Oštro on the line Cape Oštro – Cape Veslo (Fig. 3), were calculated. Coordinates of the Cape Oštro and Cape Veslo were taken from the article 5 of above mentioned *Protocol*.

Disparity between coordinates of the point T, which are given in the article 5 of *Protocol Between the Government of the Republic of Croatia and the Federal Government*

of the Federal Republic of Yugoslavia About Temporary Regime for the South Boundary Between the two Countries (Y 6 544 854, X 4 694 397) and calculated coordinates (Y 6 544 854, X 4 694 150) appeared. An explanation of this disparity is given in (Filipović 2004), see Fig. 4.

“Protocol of temporary regime on Prevlaka in the Article 5 gives the technical information which makes confusion while drawing points in the map. Given point is remote 3 cables (555.6 meters), with coordinates (Y 6 544 854, X 4 694 397) from Cape Oštro (point T1 in Fig. 4) with the distance less then 3 cables, i.e. 2.7 cables (498 meters). Its exact coordinates have to be the coordinates of the point T2 (Y 6 544 854, X 4 694 150). Point T2 is located 3 cables (555.6 meters) on the line Cape Oštro (Y 6 544 356, X 4 694 397) – Cape Veslo (Y 6 550 598, X 4 691 305).” (Filipović 2004).

According to the coordinates of points 42 and 43 of continental shelf, which were taken from (Službeni list

Pojavilo se nepodudaranje koordinata točke T danih u članku 5 *Protokola između Vlade Republike Hrvatske i Savezne Vlade Savezne Republike Jugoslavije o privremenom režimu uz južnu granicu između dviju država* (Y 6 544 854, X 4 694 397) i izračunanih koordinata (Y 6 544 854, X 4 694 150). Obrazloženje neslaganja dano je u (Filipović 2004), vidi sliku 4.

“Protokol o privremenom režimu na Prevlaci u članku 5. daje tehničku informaciju koja stvara zabunu kod ucrtavanja točaka na kartu. Dana je točka udaljena 3 kabela (555,6 m) koordinatama (Y 6 544 854, X 4 694 397) od rta Oštro (na slici 4 točka T1) koja se nalazi na manjoj udaljenosti od 3 kabela, tj. 2,7 kabela (498 m), a njene prave koordinate bi trebale biti u točki T2 (Y 6 544 854, X 4 694 150) koja se nalazi 3 kabela (555,6 m) na spojnici rt Oštro (Y 6 544 356, X 4 694 397) – rt Veslo (Y 6 550 598, X 4 691 305).” (Filipović 2004).

Na osnovi koordinata točaka epikontinentalnog pojasa 42 i 43 preuzetih iz (Službeni list SFRJ 28/1970, Rudolf 1976), određenih koordinata točke T, azimuta $\alpha_T^C = 206^\circ$ (definiran *Protokolom između Vlade Republike Hrvatske i Savezne Vlade Savezne Republike Jugoslavije o privremenom režimu uz južnu granicu između dviju država*, članak 6) te uz primjenu preostalih neophodnih formula izračunana je najjužnija točka epikontinentalnog pojasa (točka C na slici 3). Konačne koordinate najsjevernije, najjužnije, najzapadnije i najistočnije točke Hrvatske kada je u razmatranje uzeto i morsko područje dane su u tablici 1. Cjeloviti postupak računanja koordinata točke T i koordinata najjužnije hrvatske točke na moru može se naći u (Rajaković 2008).

U poglavljima koja slijede dane su teorijske postavke pojedinih varijanti konformnih konusnih projekcija, određeni su parametri takvih projekcija na osam načina i na kraju je predložena najbolja (u smislu objašnjenja na kraju 1. poglavlja) Lambertova konformna konusna projekcija za Hrvatsku uključujući i hrvatsko more do crte epikontinentalnog pojasa (morski pojas koji se nadovezuje na teritorijalno more).

Tablica 1. Konačne koordinate najsjevernije, najjužnije, najzapadnije i najistočnije točke Hrvatske na elipsoidu GRS80 kad je obuhvaćeno i morsko područje

Točka	φ	λ
1 (najistočnija)	45°11'45"	19°26'50"
2 (najsjevernija)	46°33'18"	16°22'07"
3 (najzapadnija)	45°10'59"	12°59'50"
4 (najjužnija)	41°36'39"	18°02'02"

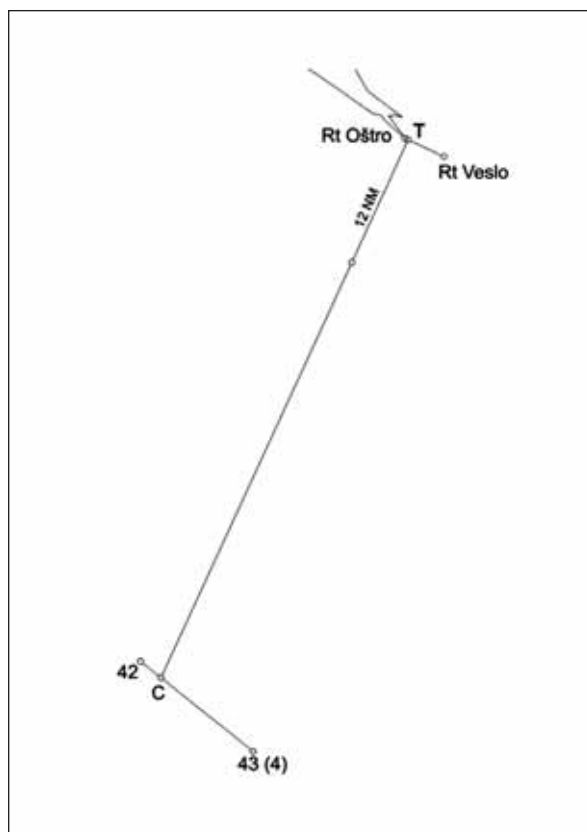


Fig. 3. Line of temporary boundary between Republic of Croatia and Yugoslavia according to Protocol Between the Government of the Republic of Croatia and the Federal Government of the Federal Republic of Yugoslavia About Temporary Regime for the South Boundary Between the two Countries

Slika 3. Crta privremenog razgraničenja Republike Hrvatske i Jugoslavije prema Protokolu između Vlade Republike Hrvatske i Savezne Vlade Savezne Republike Jugoslavije o privremenom režimu uz južnu granicu između dviju država

3. Teorijske postavke

Za praktičnu primjenu formula konformnih konusnih projekcija potrebno je zadati ili na neki drugi način odrediti konstante projekcije k i K . Slijedi osam načina računanja konstanti k i K pri čemu su korišteni parametri elipsoida GRS80 preuzeti iz (Moritz 1992, Lapaine i dr. 2006). Postavke pojedinih varijanti preuzete su iz literature (npr. Lapaine i dr. 2000), a za koeficijente k i K primjenom kriterija Airya-Jordana izvedeni su u ovome radu odgovarajući izrazi.

Varijanta 1

Konstante k i K određuju se uz uvjet da je mjerilo n_0 na paraleli zadane širine φ_0 jednako jedinici i istodobno najmanje.

Table 1. Final coordinates of the most southernmost, northernmost, easternmost and westernmost point of Croatia on the ellipsoid GRS 80 when maritime area is included

Point	φ	λ
1 (easternmost)	45°11'45"	19°26'50"
2 (northernmost)	46°33'18"	16°22'07"
3 (westernmost)	45°10'59"	12°59'50"
4 (southernmost)	41°36'39"	18°02'02"

SFRJ, 28/1970; Rudolf 1976), calculated point T, azimuth $\alpha_T^C = 206^\circ$ (defined by *Protocol Between the Government of the Republic of Croatia and the Federal Government of the Federal Republic of Yugoslavia About Temporary Regime for the South Boundary Between the Two Countries*, article 6) and using required formulae was calculated the southernmost point of continental shelf (point C in Fig. 3). Final coordinates of the southernmost, northernmost, easternmost and westernmost point of Croatia, when maritime area is included, are given in table 1. Complete procedure of calculating coordinates of point T and the southernmost point on the Croatian sea can be found in (Rajaković 2008).

In following sections the theoretical thesis of several variants of conformal conic projection are given. Parameters of projections are determined in eight ways. At the end of this paper the best (in the sense explained at the end of the 1st chapter) Lambert conformal conic projection for Croatia with included Croatian sea up to the continental shelf is suggested.

3. Theoretical Basis

For applying formulae of conformal conic projections we have to propose or on some other way determine constants K and k . Below are shown eight ways of calculating constants K and k by using parameters of the ellipsoid GRS80, which were taken from (Moritz 1992, Lapaine et al 2006). Settings of each variant were taken from (Lapaine et al 2000) and the expressions for parameters k and K of Airy-Jordan criterion were derived in this paper.

Variant 1

Condition for determining constants k and K is that the scale factor n_0 on the parallel with given latitude φ_0 is equal to 1 and is the least at the same time.

The constant k is determined by finding an extreme of the function:

$$n = \frac{k\rho}{r}$$



Fig. 4. A part of the chart 100–28 of the Hydrographic Institute of the Republic of Croatia with deleted part of the maritime content for the purpose of better seeing lines of boundary, taken from (Filipović 2004)

Slika 4. Dio pomorske karte 100–28 Hrvatskoga hidrografskog instituta na kojoj je izbrisan dio morskog sadržaja radi boljeg pregleda ucrtanih crta razgraničenja, preuzeto iz (Filipović 2004)

Konstanta k određuje se traženjem ekstrema funkcije:

$$n = \frac{k\rho}{r}$$

Izraz $k = \sin\varphi_0$ zadovoljava uvjet da je mjerilo n za tu vrijednost k na širini φ_0 najmanje. Da bi se odredila konstanta K treba zadovoljiti uvjet da je mjerilo uzduž zadane paralele jednako 1. Dobije se:

$$K = N_0 \operatorname{ctg}\varphi_0 U_0^{\sin\varphi_0}$$

Navedene jednadžbe odnose se na uspravnu konformnu konusnu projekciju elipsoida s jednom standardnom paralelom. Takve se projekcije primjenjuju za područja čiji raspon po širini nije veći od 6° – 8° . U tom slučaju deformacije duljina neće biti veće od 0,2% (Vahramejeva i dr. 1986).

Varijanta 2

Treba odrediti konstante k i K pod uvjetom da mjerila na krajevima teritorija (n_N, n_S) budu ista, a mjerilo uzduž paralele nepoznate širine φ_0 bude najmanje i jednako 1.

Iz uvjeta da su mjerila na krajevima teritorija jednaka ($n_N=n_S$) slijedi:

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N}$$

Širina φ_0 određuje se iz uvjeta $k=\sin\varphi_0$ koji određuje da je mjerilo n uzduž paralele sa širinom φ_0 najmanje. Iz uvjeta da je mjerilo uzduž paralele nepoznate širine φ_0 jednako jedinici ($n_0=1$) dobiva se:

$$K = \frac{r_0 U_0^k}{k}$$

Konformna konusna projekcija s dvije standardne paralele upotrebljava se za područja "srednjih" veličina čiji je raspon po širini 10° – 30° (Vahramejeva i dr. 1986). Slijede varijante konformnih konusnih projekcija s dvije standardne paralele.

Varijanta 3

Konstante k i K treba odrediti pod uvjetom da mjerila (n_1, n_2) na dvije zadane paralele φ_1, φ_2 budu jednaka 1.

Iz uvjeta da su mjerila na dvije zadane paralele jednaka ($n_1=n_2$) računa se konstanta k :

$$k = \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln U_1 - \ln U_2}$$

Konstanta K računa se iz uvjeta da mjerila na dvije zadane paralele budu jednaka jedinici ($n_1=1, n_2=1$):

$$K = \frac{r_1 U_1^k}{k} = \frac{r_2 U_2^k}{k}$$

Geodetska širina φ_0 s najmanjim mjerilom računa se iz izraza $k=\sin\varphi_0$.

Kavrajškij (1959) predložio je definiranje standardnih paralela φ_1 i φ_2 na sljedeći način:

$$\varphi_1 = \varphi_S + \frac{2\Delta}{C}, \quad \varphi_2 = \varphi_N - \frac{2\Delta}{C},$$

gdje je:

$$2\Delta = \varphi_N - \varphi_S$$

Veličina parametra C ovisi o konfiguraciji granične linije područja. Ako je oblik područja romboidan, tada $C = 3$, ako je blizak kružnici, tada $C = 4$, ako je sličan pravokutniku, tada $C = 5$. Prema Bugajevskom i Snyderu (1995), Deetz i Adams (1934) predložili su općenito $C = 6$, a Hinks (1912) također općenito $C = 7$.

Varijanta 4

Konstante k i K treba odrediti pod uvjetom da mjerila na dvjema krajnjim paralelama (φ_N, φ_S) budu jednaka, a da mjerilo uzduž treće zadane paralele (φ_3) bude jednako 1.

Iz uvjeta da mjerila na dvije krajnje paralele budu jednaka ($n_S=n_N$) slijedi izraz za konstantu k :

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N}$$

Iz uvjeta da mjerilo uzduž treće zadane paralele bude jednako jedinici ($n_3=1$) proizlazi izraz za konstantu K :

$$K = \frac{r_3 U_3^k}{k}$$

Varijanta 5

Treba odrediti konstante k i K tako da su mjerila uzduž dviju krajnjih paralela međusobno jednaka i da je najveće mjerilo za toliko veće od jedinice za koliko je najmanje mjerilo manje od jedinice.

Iz uvjeta da mjerila uzduž dviju krajnjih paralela budu jednaka ($n_S=n_N$) slijedi:

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N}$$

Širinu paralele s najmanjim mjerilom preslikavanja dobijemo prema formuli:

$$k = \sin\varphi_0$$

Konstanta K slijedi iz drugog uvjeta da je najveće mjerilo za toliko veće od jedinice za koliko je najmanje mjerilo manje od jedinice:

An expression $k = \sin \varphi_0$ accomplishes the condition that the scale factor n is the least on latitude φ_0 . For computing constant K the condition that the scale factor is equal to 1 along given parallel has to be fulfilled. An expression for constant K is:

$$K = N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 U_0^{\sin \varphi_0}.$$

Mentioned equations are referred to the normal conformal conic projection of the ellipsoid with one standard parallel. These kinds of projections are used for an area where latitude range is not greater than 6° – 8° . In that case linear distortions will not be greater than 0.2% (Vahrameeva et al 1986).

Variant 2

For determining constants K and k the scale factors on the edges of the territory (n_N, n_S) have to be equal when the scale factor along parallel with unknown latitude φ_0 is the least and equal to 1.

Using condition that the scale factors on the edges of the territory are the same ($n_N = n_S$), follows

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N}.$$

Condition $k = \sin \varphi_0$ defines latitude φ_0 and that the scale factor n along parallel with latitude φ_0 is the least. From condition that the scale factor along parallel with unknown latitude φ_0 is equal to 1 follows an expression:

$$K = \frac{r_0 U_0^k}{k}.$$

Conformal conic projection with 2 standard parallels is applied for "medium-sized" areas with latitude range 10° – 30° (Vahrameeva et al 1986). In instalment conformal conic projections with 2 standard parallels are described.

Variant 3

Condition for determining constants k and K is that the scale factors (n_1, n_2) on two given parallels (φ_1, φ_2) are equal to 1.

If the scale factors on two given parallels ($n_1 = n_2$) are the same, an expression for constant k is:

$$k = \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln U_1 - \ln U_2}.$$

If the scale factors on two given parallels ($n_1=1, n_2=1$) are equal to 1, an expression for constant K is:

$$K = \frac{r_1 U_1^k}{k} = \frac{r_2 U_2^k}{k}.$$

Geodetic latitude with the least scale factor is calculated using an expression $k = \sin \varphi_0$.

Kavrayskiy (1959) suggested definition of standard parallels φ_1 and φ_2 in following way:

$$\varphi_1 = \varphi_S + \frac{2\Delta}{C}, \quad \varphi_2 = \varphi_N - \frac{2\Delta}{C},$$

where:

$$2\Delta = \varphi_N - \varphi_S.$$

Value of parameter C depends on the configuration of boundary line. If the shape of area looks like a rhombus, parameter C is equal to 3. If the shape of area is approximate a circle, C equals 4. If it is a rectangle, C equals 5. According to Bugaevskiy and Snyder (1995), Deetz and Adams (1934) offered value 6 for C in general, whereas Hinks (1912) suggested value 7.

Variant 4

Condition for determining constants k and K is that the scale factors on two edges parallels (φ_N, φ_S) are equal and scale factor along third given parallel (φ_3) is equal to 1.

If the scale factors on two edges parallels are the same ($n_S = n_N$), an expression for constant k is:

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N}.$$

If the scale factor along third given parallel is equal to 1 ($n_3 = 1$), an expression for constant K is:

$$K = \frac{r_3 U_3^k}{k}.$$

Variant 5

Condition for determining constants k and K is that the scale factors on two edges parallels are the same and that the largest scale factor is greater than 1 as much as the least scale factor is lesser than 1.

If the scale factors along two edge parallels are the same ($n_S = n_N$), an expression for constant k is:

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N}.$$

Latitude of the parallel with the least scale factor is calculated according to formula:

$$k = \sin \varphi_0.$$

An expression for constant K follows from second condition: the largest scale factor is greater than 1 as much as the least scale factor is lesser than 1.

$$K = \frac{2r_S U_S^k r_0 U_0^k}{k(r_S U_S^k + r_0 U_0^k)} = \frac{2r_N U_N^k r_0 U_0^k}{k(r_N U_N^k + r_0 U_0^k)}.$$

Latitudes of standard parallels with scale factors 1 are determined from transcendental equation:

$$rU^k = kK,$$

which can be solved by using appropriate iterative procedure.

$$K = \frac{2r_S U_S^k r_0 U_0^k}{k(r_S U_S^k + r_0 U_0^k)} = \frac{2r_N U_N^k r_0 U_0^k}{k(r_N U_N^k + r_0 U_0^k)}.$$

Širine standardnih paralela na kojima je mjerilo jednako jedinici određuju se iz transcendentne jednadžbe:

$$rU^k = kK,$$

koja se može riješiti odgovarajućim iterativnim postupkom.

Varijanta 6

Konstante projekcije k i K određuju se uz uvjet da su linearne deformacije na krajnjim paralelama i na paraleli s najmanjim mjerilom jednake po apsolutnim vrijednostima.

Izrazi za konstante koje se odnose na ovaj slučaj imaju sljedeći oblik:

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N}; K = \frac{1}{k} \sqrt{r_S r_0 U_S^k U_0^k} = \frac{1}{k} \sqrt{r_N r_0 U_N^k U_0^k}.$$

Varijanta 7

Konstante projekcije k i K određuju se uz uvjet da su linearna mjerila n_S i n_N na krajnjim paralelama međusobno jednaka i da se u isto doba od jedinice razlikuju za isti iznos koliko se od jedinice razlikuje mjerilo n_m na srednjoj paraleli područja preslikavanja. Pritom geodetskoj širini srednje paralele odgovara aritmetička sredina geodetskih širina krajnjih paralela razmatranog područja.

Jednadžbe konstanti koje se odnose na ovaj slučaj imaju sljedeći oblik:

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N};$$

$$K = \frac{2r_N r_m U_N^k U_m^k}{k(r_N U_N^k + r_m U_m^k)} = \frac{2r_S r_m U_S^k U_m^k}{k(r_S U_S^k + r_m U_m^k)}.$$

Izborom parametara k i K prema varijantama 1–7 bavilo se nekoliko autora, a među njima treba posebno istaknuti V. V. Vitkovskoga (1907), M. D. Solov'eva (1946) i V. V. Kavrajškoga (1959).

Varijanta 8

Srednja kvadratna deformacija u pojedinoj točki prema Airyju (1861) je:

$$\varepsilon_A^2 = \frac{1}{2} [(a-1)^2 + (b-1)^2].$$

Za konformne projekcije je $a=b=m=n$, pa je

$$\varepsilon_A^2 = (n-1)^2.$$

Formula Jordana iz 1896. je

$$\varepsilon_J^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (c-1)^2 d\alpha.$$

Za konformne projekcije je $c=a=b=m=n$, c ne ovisi o azimutu α (mjerilo dužina u pojedinoj točki jednako je u svim smjerovima), pa je:

$$\varepsilon_J^2 = (n-1)^2.$$

To znači da za konformne projekcije vrijedi

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_A^2 = \varepsilon_J^2 = (n-1)^2.$$

Srednja kvadratna deformacija duljina na nekom području G može se izraziti ovako:

$$E^2 = \frac{1}{G} \int_G \varepsilon^2 dG.$$

Budući da izvod formula za najbolju Lambertovu konformnu konusnu projekciju uz primjenu Airy-Jordanova kriterija nije do sad objavljen u literaturi, ovdje ćemo ga dati u cijelosti. Potrebni izrazi za daljnje računanje za uspravne konformne konusne projekcije već su ranije navedeni.

Postavimo zahtjev da bude $n_S = n_N$, tj. da su mjerila na krajevima teritorija ista. To vodi do izraza za konstantu k :

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N}.$$

Drugi uvjet koji vodi određivanju konstante K , je zahtjev da srednja kvadratna deformacija duljina na čitavom području preslikavanja G bude minimalna. Dobiva se:

$$E^2 = \frac{1}{G} \int_G (n-1)^2 dG = \frac{1}{G} \int_G \left(\frac{k\rho}{r} - 1 \right)^2 dG.$$

Diferencijal površine dG na rotacijskom elipsoidu:

$$dG = MN \cos \varphi d\varphi d\lambda.$$

Pretpostavimo da je područje integracije omeđeno dvama meridijanima i dvjema paralelama. Ako se primjene prethodna dva izraza i uzme da je $\Delta\lambda = \lambda_W - \lambda_E$ dobiva se:

$$E^2 = \frac{1}{G} \Delta\lambda \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \left(\frac{k\rho}{r} - 1 \right)^2 MN \cos \varphi d\varphi,$$

odnosno

$$E^2 = \frac{\Delta\lambda}{G} \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \left(\frac{kK}{rU^k} - 1 \right)^2 MN \cos \varphi d\varphi.$$

Tražimo onaj K za koji je $E^2 = \min$. Derivacija prethodne funkcije je:

Variante 6

Condition for determining constants k and K is that the linear distortions on edge parallels and on the parallel with the least scale factor have the same absolute value.

Expressions for constants, which are referred to above condition, are:

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N}; K = \frac{1}{k} \sqrt{r_S r_0 U_S^k U_0^k} = \frac{1}{k} \sqrt{r_N r_0 U_N^k U_0^k}.$$

Variante 7

Condition for determining constants k and K is that linear distortions n_s and n_N on edge parallels are equal and that at the same time their difference from 1 is the same as the difference between 1 and the scale factor n_m on the middle parallel of the projecting area.

Expressions for constants, which are referred to above condition, are:

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N},$$

$$K = \frac{2r_N r_m U_N^k U_m^k}{k(r_N U_N^k + r_m U_m^k)} = \frac{2r_S r_m U_S^k U_m^k}{k(r_S U_S^k + r_m U_m^k)}.$$

Several authors dealt with selecting parameters k and K according to variants 1–7. Noted authors include V. V. Vitkovskiy (1907), M. D. Solov'ev (1946) and V. V. Kavrayskiy (1959).

Variante 8

According to Airy (1861) an arithmetic mean of distortions in a point is:

$$\varepsilon_A^2 = \frac{1}{2} [(a-1)^2 + (b-1)^2].$$

For conformal projection is $a = b = m = n$, then is:

$$\varepsilon_A^2 = (n-1)^2.$$

Formula of Jordan from 1896 is:

$$\varepsilon_J^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (c-1)^2 d\alpha.$$

For conformal projections is $c = a = b = m = n$, c does not depend on azimuth α (linear scale in particular point is the same in all directions), then is:

$$\varepsilon_J^2 = (n-1)^2.$$

This means that $\varepsilon^2 = \varepsilon_A^2 = \varepsilon_J^2 = (n-1)^2$.

It follows that the mean square linear distortion in entire domain G is:

$$E^2 = \frac{1}{G} \int_G \varepsilon^2 dG.$$

Since the derivation of formulae for this variant has not been published yet in any literature, it will be given here in its completeness. Required expressions for conformal conic projections were given in the introductory part of the paper.

If the scale factors on the edges of the territory are the same ($n_s = n_N$), an expression for constant k is:

$$k = \frac{\ln r_N - \ln r_S}{\ln U_S - \ln U_N}.$$

Second condition determines constant K , which demands the mean square linear distortion in entire domain G to be minimal. This gives:

$$E^2 = \frac{1}{G} \int_G (n-1)^2 dG = \frac{1}{G} \int_G \left(\frac{k\rho}{r} - 1 \right)^2 dG.$$

Differential area dG on the rotational ellipsoid is:

$$dG = MN \cos \varphi d\varphi d\lambda.$$

Let us assume the integration area is bound by two meridians and two parallels. Using two above expression and $\Delta\lambda = \lambda_W - \lambda_E$ it follows:

$$E^2 = \frac{1}{G} \Delta\lambda \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \left(\frac{k\rho}{r} - 1 \right)^2 MN \cos \varphi d\varphi,$$

respectively

$$E^2 = \frac{\Delta\lambda}{G} \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \left(\frac{kK}{rU^k} - 1 \right)^2 MN \cos \varphi d\varphi.$$

We have to search for K with $E^2 = \min$. The derivation of above function gives:

$$\frac{dE^2}{dK} = \frac{\Delta\lambda}{G} \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} 2 \left(\frac{kK}{rU^k} - 1 \right) \frac{k}{rU^k} MN \cos \varphi d\varphi$$

$$\frac{dE^2}{dK} = 2 \frac{\Delta\lambda}{G} \left[K \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{k^2}{r^2 U^{2k}} MN \cos \varphi d\varphi - \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{k}{rU^k} MN \cos \varphi d\varphi \right] = 0.$$

$$\frac{dE^2}{dK} = \frac{\Delta\lambda}{G} \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} 2 \left(\frac{kK}{rU^k} - 1 \right) \frac{k}{rU^k} MN \cos \varphi d\varphi$$

$$\frac{dE^2}{dK} = 2 \frac{\Delta\lambda}{G} \left[K \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{k^2}{r^2 U^{2k}} MN \cos \varphi d\varphi - \right.$$

$$\left. - \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{k}{rU^k} MN \cos \varphi d\varphi \right] = 0.$$

Odatle se dobije:

$$K = \frac{\int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{k}{rU^k} MN \cos \varphi d\varphi}{\int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{k^2}{r^2 U^{2k}} MN \cos \varphi d\varphi}$$

i konačno

$$K = \frac{\int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{M}{U^k} d\varphi}{k \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{M}{rU^{2k}} d\varphi}$$

4. Rasprava

Za svaku od osam varijanti opisanih u prethodnom poglavlju izračunane su konstante k i K , i na taj način određene konformne konusne projekcije koje se razlikuju s obzirom na postavljene uvjete. Posljedica toga je da se te projekcije međusobno razlikuju i po raspodjeli linearnih i površinskih deformacija.

Prikaz Zemljine plohe u ravnini u bilo kojoj projekciji je deformiran. Duljine, površine i kutovi pri preslikavanju se deformiraju. Veličina deformacije jedan je od bitnih pokazatelja vrijednosti kartografskih projekcija (Frančula 2004). U uspravnim konformnim konusnim projekcijama nema deformacije kutova, deformacije površina definirane su s pomoću mjerila površina $p = m^2$ jer su mjerila uzduž meridijana i paralela jednaka. Odatle slijedi da je za izbor najbolje konformne konusne projekcije dovoljno promatrati deformacije duljina. U ovome radu deformacije duljina računat će se i prikazivati prema izrazu

$$d = 100(m-1),$$

tj. bit će izražene u postocima.

Za svaku konformnu konusnu projekciju izrađena je tablica rasporeda linearnih deformacija za promatrano područje, te grafički prikaz tih deformacija. Područje istraživanja je Hrvatska s morskim područjem (uključujući teritorijalno more i epikontinentalni pojas) i proteže

se od najjužnije paralele sa širinom $41^\circ 36'$ do najsjevnije paralele sa širinom $46^\circ 33'$.

Na grafikonima koji slijede prikazana je raspodjela deformacija u rasponu od $41^\circ 30'$ do $46^\circ 30'$ geodetske širine kako bi se obuhvatilo cjelokupno područje Hrvatske, uključujući i epikontinentalni pojas.

U varijanti 1 uzete su 3 podvarijante odnosno paralele na kojima je mjerilo najmanje i jednako 1 ($41^\circ 00'$, $42^\circ 00'$ i $44^\circ 00'$). Širine paralela $41^\circ 00'$ i $42^\circ 00'$ služe za pregled ekstremnih vrijednosti linearnih deformacija na području promatranja. Ako je širina paralele na kojoj je mjerilo najmanje i jednako jedinici $41^\circ 00'$, linearna deformacija na širini $46^\circ 30'$ je 0,47 (slika 5), a za $42^\circ 00'$ je 0,32 (slika 6). Kada je za širinu na kojoj je mjerilo najmanje i jednako 1 uzeto $44^\circ 00'$ deformacije su sve pozitivnog predznaka te ne postoji simetričnost u pozitivnim i negativnim predznacima s obzirom na odabranu paralelu (slika 7).

Za varijantu 2 vrijedi isti zaključak kao i za širinu $44^\circ 00'$ u varijanti 1.

Do sada se javljala samo po jedna standardna paralela, u sljedećim slučajevima su uvijek po dvije standardne paralele.

Unutar varijante 3 definirane su sljedeće podvarijante:

- $\varphi_1 = 41^\circ 30'$, $\varphi_2 = 46^\circ 30'$
- $C=3$
- $C=4$
- $C=5$
- $C=6$
- $C=7$

U slučaju zadanih standardnih paralela $41^\circ 30'$ i $46^\circ 30'$ krivulja linearnih deformacija pomaknuta je sasvim na lijevu stranu, odnosno vrijednosti deformacija su samo negativne s najmanjom vrijednosti $-0,09$ (slika 8). Za zadanu konstantu $C=3$ krivulja je pomaknuta više u desno tako da samo mali dio linearnih deformacija poprima negativnu vrijednost od $-0,01$ (slika 9). Za svaku sljedeću konstantu C krivulja se pomiče u lijevo tako da je tjeme za $C=4$ u $-0,02$ (slika 10), za $C=5$ u $-0,03$ (vrijednost linearne deformacije za širinu φ_0), vidi sliku 11, za $C=6$ u $-0,04$ (slika 12), za $C=7$ u $-0,05$ (slika 13). Postojala je dvojba između odabira podvarijanti $C=6$ i $C=7$ dok se od $C=3$, $C=4$, $C=5$ odustalo jer je njihova raspodjela deformacija bila lošija od deformacija projekcija za $C=6$ i $C=7$. Za $C=6$ na paraleli sa širinom $41^\circ 30'$ linearna deformacija je 0,06 a tjeme u $-0,04$. Za $C=7$ deformacije se kreću u rasponu $\pm 0,05$. Stoga slijedi da je za daljnje razmatranje iz varijante 3 najpovoljnija konformna konusna projekcija određena varijantom $C=7$ kojoj odgovaraju standardne paralele $\varphi_1=42^\circ 18'$ i $\varphi_2=45^\circ 50'$.

U varijanti 4 je uvjet da neka proizvoljno zadana paralela bude standardna paralela. Budući da ne postoji neki poseban razlog zbog kojeg bi se nekoj širini dalo

Continues:

$$K = \frac{\int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{k}{rU^k} MN \cos \varphi d\varphi}{\int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{k^2}{r^2 U^{2k}} MN \cos \varphi d\varphi},$$

and finally

$$K = \frac{\int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{M}{U^k} d\varphi}{k \int_{\varphi_S}^{\varphi_N} \frac{M}{rU^{2k}} d\varphi}.$$

4. Discussion

For each of eight variants described in the previous chapter constants K and k were obtained, and respectively conformal conic projections, which differ according to given conditions. The consequences of those conditions are differences between projections, according to their linear and area distortions.

Earth presentation in the plane is distorted regardless of type of projection. Distances, areas and angles are distorted in the projection. Amount of distortion is one of the essential indicators of the cartographic projections valuation (Frančula 2004). In normal conformal conic projection there are not any angular distortions. Area distortions are defined by an expression $p = m^2$ because the scale factors along the meridians and parallels are equal. So, for selecting the best conformal conic projection it is enough to look at linear distortions. In this paper, linear distortions are going to be calculated according to the expression

$$d = 100(m-1)$$

i.e. they are going to be expressed as percentages.

Each conformal conic projection has its table with values of linear distortions for the interested area and graph of these distortions. The interested area of Croatia includes maritime zone (with territorial sea and continental shelf) and spreads from the southernmost parallel with latitude $41^{\circ}36'$ to the northernmost parallel with latitude $46^{\circ}33'$.

On following graphic charts distortion distributions in range from geodetic latitude $41^{\circ}30'$ to $46^{\circ}30'$ are presented.

Variant 1 consists of 3 sub-variants with reference to that the scale factor on the parallels is the least and equal to 1 ($41^{\circ}00'$, $42^{\circ}00'$ and $44^{\circ}00'$). Latitudes $41^{\circ}00'$

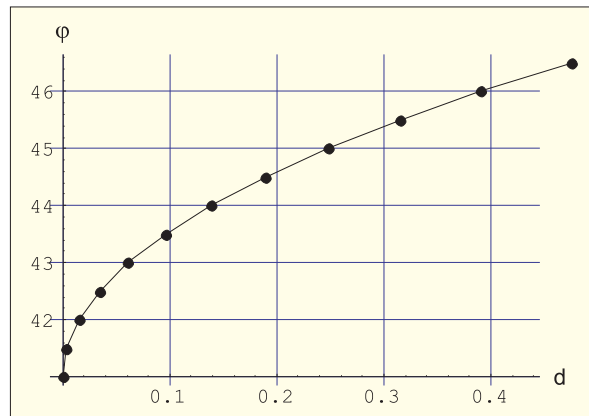


Fig. 5. Linear distortions for normal conformal conic projection, standard parallel $41^{\circ}00'$

Slika 5. Prikaz linearnih deformacija u uspravnoj konformnoj konusnoj projekciji sa standardnom paralelom $41^{\circ}00'$

and $42^{\circ}00'$ are used for displaying extreme values of linear distortions for interested area. If the case is based on parallel with latitude $41^{\circ}00'$, where scale factor is the least and equal to 1, linear distortion on latitude $46^{\circ}30'$ is 0.47 (Fig. 5). If latitude is $42^{\circ}00'$, distortion is 0.32 (Fig. 6). If latitude $44^{\circ}00'$ has scale factor the least and equal to 1, distortions are all with positive signs and there is no symmetry between positive and negative signs regarding to selected parallel (Fig. 7).

It is the same conclusion for variant 2 as it was for variant 1 with latitude $44^{\circ}00'$.

Until now there was only one standard parallels in each variant, from now on there will be two standard parallels.

Variant 3 consisted of several sub-variants:

- a) $\varphi_1 = 41^{\circ}30'$, $\varphi_2 = 46^{\circ}30'$
- b) C=3
- c) C=4
- d) C=5
- e) C=6
- f) C=7

When standard parallels are $41^{\circ}30'$ and $46^{\circ}30'$ curve of linear distortions is translated to the left, there are values with only negative signs and the minimum value is -0.09 (Fig. 8). If constant C is 3, curve is skewed much more to the right so that only a few linear distortions have negative signs with value of -0.01 (Fig. 9). For each next constant C curve is translated to left, so if the constant C is 4 vertex is in -0.02 (Fig. 10), for C = 5 vertex is in -0.03 (linear distortion for latitude φ_0 , Fig. 11), for C = 6

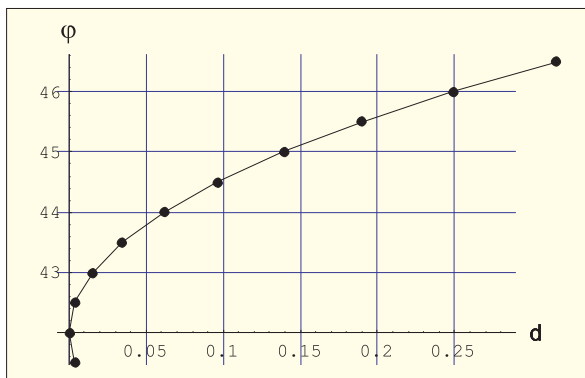


Fig. 6. Linear distortions for normal conformal conic projection, standard parallel 42°00'

Slika 6. Prikaz linearnih deformacija u uspravnoj konformnoj konusnoj projekciji sa standardnom paralelom 42°00'

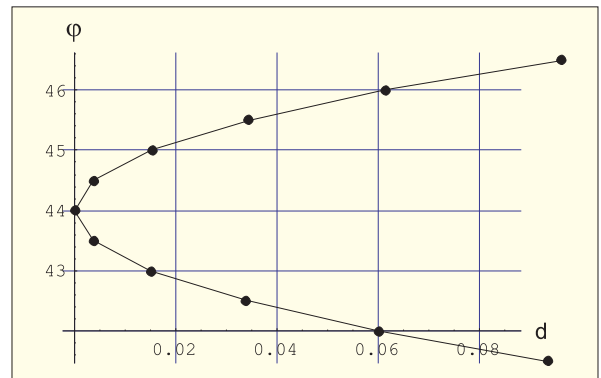


Fig. 7. Linear distortions for normal conformal conic projection, standard parallel 44°00'

Slika 7. Prikaz linearnih deformacija u uspravnoj konformnoj konusnoj projekciji sa standardnom paralelom 44°00'

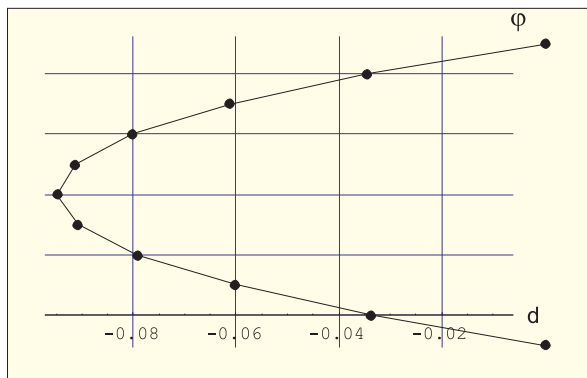


Fig. 8. Linear distortions for normal conformal conic projection, standard parallels 41°30' and 46°30'

Slika 8. Prikaz linearnih deformacija za uspravnu konformnu konusnu projekciju sa standardnim paralelama 41°30' i 46°30'

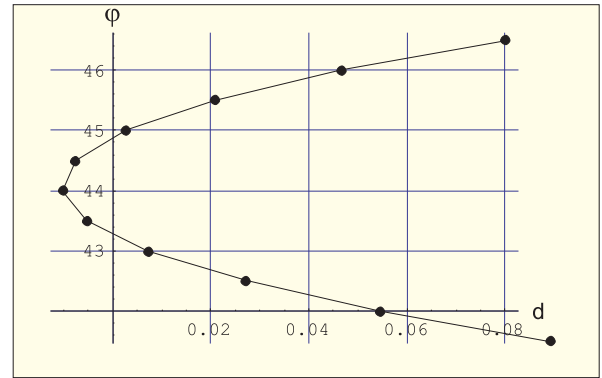


Fig. 9. Linear distortions for normal conformal conic projection, standard parallels 43°15'00'' and 44°54'00'' (given constant C = 3)

Slika 9. Prikaz linearnih deformacija za uspravnu konformnu konusnu projekciju sa standardnim paralelama 43°15'00'' i 44°54'00'' (zadana konstanta C = 3)

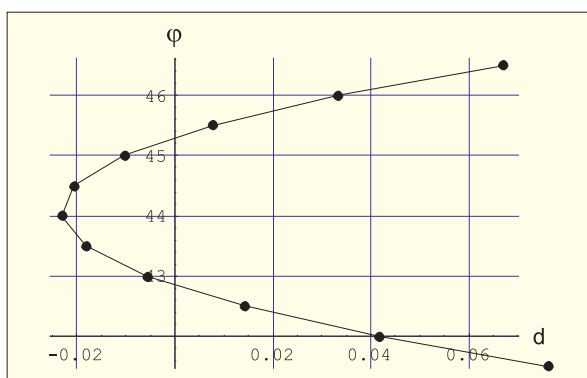


Fig. 10. Linear distortions for normal conformal conic projection, standard parallels 42°50'15'' and 45°18'45'' (given constant C = 4)

Slika 10. Prikaz linearnih deformacija za uspravnu konformnu konusnu projekciju sa standardnim paralelama 42°50'15'' i 45°18'45'' (zadana konstanta C = 4)

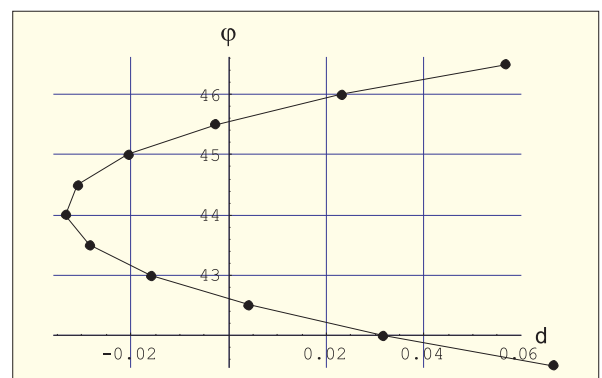


Fig. 11. Linear distortions for normal conformal conic projection, standard parallels 42°35'24'' and 45°33'36'' (given constant C = 5)

Slika 11. Prikaz linearnih deformacija za uspravnu konformnu konusnu projekciju sa standardnim paralelama 42°35'24'' i 45°33'36'' (zadana konstanta C = 5)

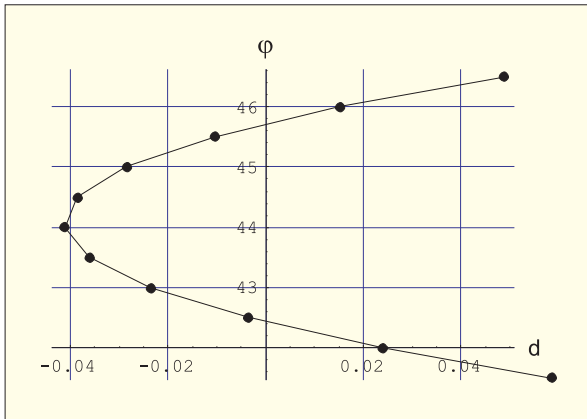


Fig. 12. Linear distortions for normal conformal conic projection, standard parallels $42^{\circ}25'30''$ and $45^{\circ}43'30''$ (given constant $C = 6$)

Slika 12. Prikaz linearnih deformacija za uspravnu konformnu konusnu projekciju sa standardnim paralelama $42^{\circ}25'30''$ i $45^{\circ}43'30''$ (zadana konstanta $C = 6$)

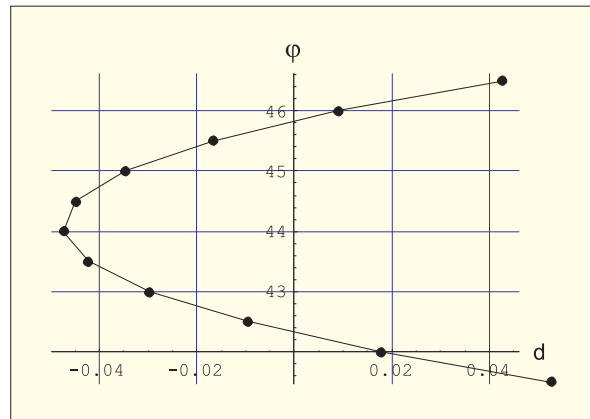


Fig. 13. Linear distortions for normal conformal conic projection, standard parallels $42^{\circ}18'26''$ and $45^{\circ}50'34''$ (given constant $C = 7$)

Slika 13. Prikaz linearnih deformacija za uspravnu konformnu konusnu projekciju sa standardnim paralelama $42^{\circ}18'26''$ i $45^{\circ}50'34''$ (zadana konstanta $C = 7$)

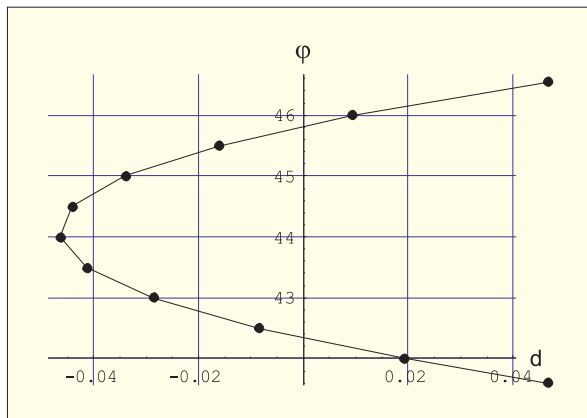


Fig. 14. Linear distortions for normal conformal conic projection with edge parallels $\varphi_N = 46^{\circ}33'$ and $\varphi_S = 41^{\circ}33'$ and with standard parallels $42^{\circ}20'00''$ and $45^{\circ}50'03''$, which are calculated using variants 5, 6 and 7.

Slika 14. Prikaz linearnih deformacija za uspravnu konformnu konusnu projekciju s krajnjim paralelama $\varphi_N = 46^{\circ}33'$ i $\varphi_S = 41^{\circ}36'$ te sa standardnim paralelama $42^{\circ}20'00''$ i $45^{\circ}50'03''$ koje su izračunane primjenom varijanti 5, 6 i 7.

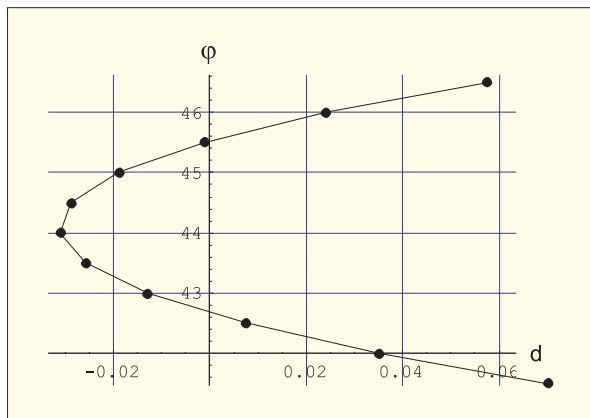


Fig. 15. Linear distortions for normal conformal conic projection with standard parallels $42^{\circ}39'40''$ and $45^{\circ}31'45''$, according to Airy and Jordan

Slika 15. Prikaz linearnih deformacija za uspravnu konformnu konusnu projekciju sa standardnim paralelama $42^{\circ}39'40''$ i $45^{\circ}31'45''$ prema Airyju i Jordanu

Table 2. Distortions for variant 3 ($C=7$) and variants 5–7
 Tablica 2. Raspored deformacija za varijantu 3 ($C=7$) i varijante 5–7

Varijante 5–7; $\varphi_0 = 44^\circ 06'$ Variants 5–7; $\varphi_0 = 44^\circ 06'$			Varijanta 3 ($C=7$); $\varphi_0 = 44^\circ 05'$ Variant 3 ($C=7$); $\varphi_0 = 44^\circ 05'$		
φ	$m=n$	$d=100(m-1)$	φ	$m=n$	$d=100(m-1)$
46°33'	1,000465	0,05	46°33'	1,000462	0,05
46°30'	1,000427	0,04	46°30'	1,000415	0,04
46°00'	1,000093	0,01	46°00'	1,000081	0,01
45°50'	1,000005	0,00	45°50'	0,999995	0,00
45°30'	0,999838	-0,02	45°30'	0,999826	-0,02
45°00'	0,999660	-0,03	45°00'	0,999648	-0,04
44°30'	0,999560	-0,04	44°30'	0,999524	-0,05
44°00'	0,999536	-0,05	44°00'	0,999575	-0,05
43°30'	0,999588	-0,04	43°30'	0,999702	-0,04
43°00'	0,999715	-0,03	43°00'	0,999904	-0,03
42°30'	0,999916	-0,01	42°30'	1,000179	-0,01
42°20'	1,000000	0,00	42°18'	1,000004	0,00
42°00'	1,000192	0,02	42°00'	1,000179	0,02
41°36'	1,000465	0,05	41°36'	1,000449	0,04
41°30'	1,000541	0,05	41°30'	1,000528	0,05

41

prednost za standardnu paralelu pred drugima, odustalo se od te varijante.

Varijante 5, 6, 7 imaju istu vrijednost konstante $k = 0,695818969$. Drugi uvjet, koji određuje konstantu K , mijenja se ovisno o varijanti. Za svaku varijantu dobije se drugačiji K , ali se za varijante 5, 6 i 7 neznatno razlikuje. Za varijantu 5 K iznosi 11 944 656,8244, za varijantu 6 je 11 944 658,3943 a za varijantu 7 je 11 944 657,1023. Na slici 14 prikazan je raspored linearnih deformacija za varijante 5, 6 i 7. Naime, razlike u iznosima i raspodjeli deformacija za te tri varijante su toliko male, da se prostim okom ne mogu zamijetiti.

U varijanti 8 zbog nemogućnosti izravnog računanja integrala u izrazu za konstantu K moralo se pristupiti numeričkoj integraciji. Korišten je softver *Mathematica*, po čijim je pravilima upisana formula za računanje konstante K . Računanje geodetskih širina standardnih paralela izvedeno je na dva neovisna načina: primjenom naredbe za traženje nultočaka nelinearne funkcije s pomoću ugrađene funkcije u *Mathematicu* i metodom raspolavljanja, koju smo isprogramirali u *Mathematici*. Dobiveno je ono što se i očekivalo, tj. standardne paralele dobivene na dva neovisna načina se podudaraju.

U varijanti 8 raspon deformacija kreće se od +0,07 (geodetska širina 41°30') do -0,03 (geodetska širina 44°00') tako da i ta varijanta nije ušla u uži izbor (slika 15).

U raspravi o raspodjeli deformacija ostalo je nekoliko konformnih konusnih projekcija između kojih je trebalo odabrati najbolju. To su projekcija s konstantom $C = 7$ iz varijante 3 i projekcije iz varijanti 5, 6 i 7. U tablici 2 dana je usporedba njihovih maksimalnih deformacija.

Iz tablice 2 i svega prethodno izloženoga slijedi da je najbolja uspravna Lambertova konformna konusna projekcija za Hrvatsku, ako se uzme u obzir i morsko područje, ona kojoj su standardne paralele s geodetskim širinama (sa zaokruženim vrijednostima na 10 minuta) 42°20' i 45°50'. Raspored i veličina linearnih deformacija te projekcije prikazani su na slici 16.

5. Zaključak

Odlukom o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i kartografskih projekcija Republike Hrvatske iz 2004. godine Lambertova konformna konusna projekcija sa standardnim paralelama 43°05' i 45°55' usvojena je da bude projekcijski koordinatni sustav Republike Hrvatske za

in -0.04 (Fig. 12), for $C = 7$ in -0.05 (Fig. 13). There was a doubt between selecting sub-variants $C = 6$ and $C = 7$, while other sub-variants $C = 3$, $C = 4$ and $C = 5$ were rejected because their distortions were worse than distortions for sub-variants $C = 6$ and $C = 7$. Linear distortion for $C = 6$ on parallel with latitude $41^{\circ}30'$ is 0.06 and vertex is in -0.04 . Distortions for $C = 7$ are in range between ± 0.05 . Therefore, the most convenient conformal conic projection from variant 3 is $C = 7$, with standard parallels $\varphi_1 = 42^{\circ}18'$ and $\varphi_2 = 45^{\circ}50'$.

In variant 4 the condition is that arbitrarily given parallel is standard parallel. This variant is discarded because there is no special reason to give precedence to any latitude.

Variants 5, 6, and 7 have the same value of constant $k = 0.695818969$. Second condition, which determines the constant K , is changed depending on variant. Each variant has different K , but there is a slightly difference between variants 5, 6 and 7. Value of constant K for variant 5 is $11\,944\,656.8244$, for variant 6 is $11\,944\,658.3943$ and for variant 7 is $11\,944\,657.1023$. In Fig. 14 linear distortions for variants 5, 6 and 7 are shown. In fact, differences in amount and distribution of distortions between these three variants are so small which they can not be seen.

Variant 8 was calculated using numerical integration, because determination of constant K can not be done by direct integration. For that purpose, software *Mathematica* was used. Formula for constant K was written according to its rules and computing of geodetic latitudes was performed on two independent ways. First way was: looking for zero points of nonlinear function and the second way was method of bisection, which was programmed inside *Mathematica*. At the end we got something what we expected; standard parallels which were computed on two different independent ways coincided.

In variant 8 range of distortions is from $+0.07$ (latitude $41^{\circ}30'$) to -0.03 (latitude $44^{\circ}00'$). Because of that, this variant did not enter in narrower selection (Fig. 15).

There remained a few conformal conic projections among which the best one has to be found. Those variants were projection with constant $C = 7$ in variant 3 and projections from variants 5, 6 and 7. A comparison of their distortions is given in table 2.

The conclusion, from table 2 and everything what was mentioned earlier, is that the best Lambert conformal conic projection for Croatia, if sea territory is con-

sidered, is the projection with standard parallels $42^{\circ}20'$ and $45^{\circ}50'$ (with values rounded to 10 minutes). Distribution and magnitude of linear distortions of the projection are shown in Fig. 16.

5. Conclusion

Lambert conformal conic projection, with standard parallels $43^{\circ}05'$ and $45^{\circ}55'$, was determined for small scale official maps of the Republic of Croatia by *Decree on Establishing New Official Geodetic Datums and Planar Map Projections of the Republic of Croatia* in 2004. Suggestion of this projection was based on research which only included continental part of Croatia. So, in this work interested area was extended to the sea part of Croatia which consists of the territorial sea and the continental shelf.

Eight variants were used to find the best Lambert conformal conic projection. For territory of Croatia with sea part and with the southernmost latitude of the parallel $41^{\circ}36'$ and the northernmost latitude of the parallel $41^{\circ}36'$ computed standard parallels are $45^{\circ}50'$ and $42^{\circ}20'$. Linear distortions are in range from -0.05 in $\varphi_0 = 44^{\circ}00'$, i.e. in the vertex of the curve, to 0.05 at the edges of the territory. The value 0.05% is 0.0005 and can also be expressed as 5 dm/km .

Optimal conformal projections for the area of Croatia were recently determined by Tutić (2008, 2009). In his doctoral thesis, he also studied the Lambert conformal conic projection. He included the continental and maritime parts of Croatia in his research, i.e. same areas as in this paper. His research demonstrated that the greatest linear distortion in absolute value is 0.0462% for the optimal Lambert conformal conic projection, which is almost the same as the value 0.0466% obtained in this paper. If both values are rounded to two decimal places, they are the same, 0.05% . Therefore, it is an independent confirmation that the result obtained in this paper is almost optimal, in the sense of smallest maximum linear distortion.

Acknowledgment

We would like to thank the reviewers for their helpful comments. We would also like to thank the Ministry of Science, Education and Sport of the Republic of Croatia for partially financing this paper, which was produced within the project *Cartography of the Adriatic* (007-0071588-1593).

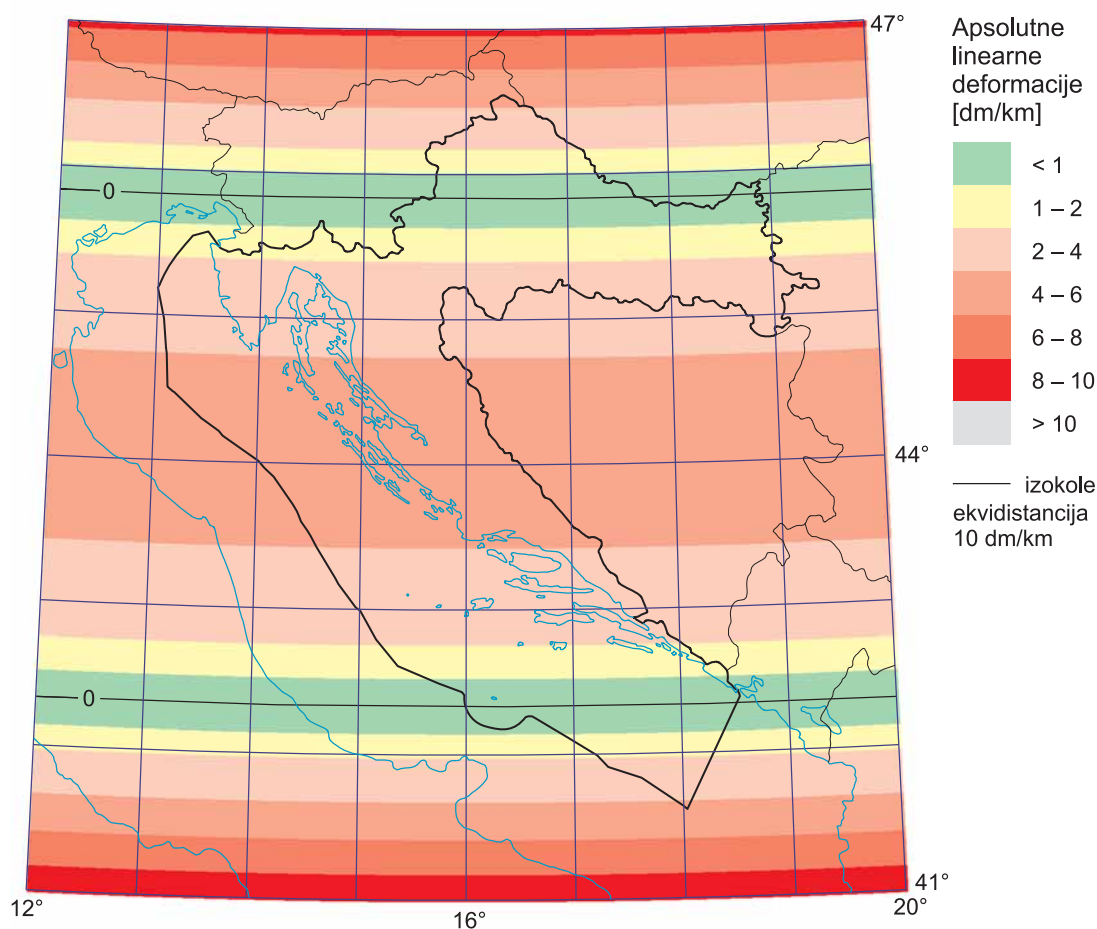


Fig. 16. Distribution and magnitude of linear distortions of Lambert conformal conic projection with two standard parallels $42^{\circ}20'$ and $45^{\circ}50'$ (from Tutić, 2008)

Slika 16. Raspored i veličina linearnih deformacija u Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji sa standardnim paralelama $42^{\circ}20'$ i $45^{\circ}50'$ (preuzeto iz Tutić, 2008)

područje pregledne državne kartografije. Ta je projekcija predložena na temelju istraživanja kod kojih je područje preslikavanja kopneni dio Hrvatske. U ovome radu područje istraživanja prošireno je na morski dio koji sadrži teritorijalno more i epikontinentalni pojas.

Izbor najbolje Lambertove konformne konusne projekcije dobiven je uspoređivanjem osam varijanti. Za područje Hrvatske s morskim dijelom te najjužnijom širinom $41^{\circ}36'$ i najsjevernijom širinom $46^{\circ}33'$ dobivene su standardne paralele $45^{\circ}50'$ i $42^{\circ}20'$. Za takav izbor raspored linearnih deformacija proteže se od $-0,05\%$ u $\varphi_0 = 44^{\circ}00'$, tj. u tjemenu krivulje, do $0,05\%$ na krajevima teritorija. Vrijednost $0,05\%$ je $0,0005$, a to se može izraziti npr. i kao 5 dm/km .

Određivanjem optimalnih konformnih projekcija za područje Hrvatske nedavno se bavio Tutić (2008, 2009). U svojoj doktorskoj disertaciji istraživao je, između ostalih, i Lambertovu konformnu konusnu projekciju. Pritom

je za područje istraživanja uzeo kopneni i morski dio Hrvatske, tj. isto područje koje je u temeljima i ovoga rada. Njegovo je istraživanje pokazalo da je za optimalnu Lambertovu konformnu projekciju najveća linearna deformacija po apsolutnoj vrijednosti $0,0462\%$, što se neznatno razlikuje od $0,0466\%$ iz ovoga rada, a ako se te obje vrijednosti zaokruže na dvije decimale, dobije se $0,05\%$, tj. te dvije vrijednosti se ne razlikuju. To je dakle jedna neovisna potvrda tvrdnje da je rezultat dobiven u ovome radu gotovo optimalan u smislu najmanje najveće linearne deformacije.

Zahvala

Autori zahvaljuju recenzentima na vrlo korisnim primjedbama. Zahvaljujemo također Ministarstvu znanosti, obrazovanja i športa RH što je djelomično financiralo ovaj rad, koji je izrađen u okviru projekta *Kartografija Jadrana* (007-0071588-1593).

References / Literatura

- Airy, G. B. (1861): Explanation of a projection by balance of errors for maps applying to a very large extent of the Earth's surface, and comparison of this projection with other projections, *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 22, 409–421.
- Bugaevskiy, L. M., Snyder, J. P. (1995): *Map Projections – A Reference Manual*, Taylor & Francis, London.
- Deetz, C. H., Adams, O. S. (1934): *Elements of Map Projection with Application to Map and Chart Construction*. U. S. Coast and Geodetic Survey Special Publication 68, Washington.
- Filipović, V. (2004): Granice na moru, prezentacija na savjetovanju Kartografija, geoinformacije i nove tehnologije, Zagreb, 17–18. 9. 2004.
- Frančula, N. (2004): Kartografske projekcije, skripta, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.
- Frischauf, J. (1905): *Die Abbildungslehre und deren Anwendung auf Kartographie und Geodäsie*. Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig.
- Hinks, A. R. (1912): *Map Projections*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Jordan, W. (1896): Der mittlere Verzerrungsfehler, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, XXV, 249–252.
- Kavrayskiy, V. V. (1959): Izbrannye trudy, Tom II, Matematicheskaya kartografiya, Vypusk 2, Konicheskie i cilindricheskie proekcii, ih primenenie. Izdanie Upravleniya nachal'nika Gidrograficheskoy sluzhby VMF.
- Lambert, J. H. (1772): *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, Dritter Theil, im Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin*. Translated in English with an introduction by W. R. Tobler: *Notes and Comments on the Composition of Terrestrial and Celestial Maps*, Michigan Geographical Publication No. 8, Department of Geography, University of Michigan, Ann Arbor, 1972.
- Lapaine, M., Kuveždić, A. (2007): On the Development of Map Projections / O razvoju kartografskih projekcija, *Kartografija i geoinformacije*, izvanredni broj, 110–147.
- Lapaine, M., Vučetić, N., Kljajić, I. (2000): Izbor parametara za Lambertovu konformnu konusnu projekciju Hrvatske u mjerilu 1:500 000, studija izrađena za Kartografski laboratorij Križovan, Zagreb, 21 str.
- Lapaine, Milj., Tutić, D., Lapaine, Mir. (2006): Numeričke vrijednosti geometrijskih konstanti elipsoida GRS 80, *Geodetski list*, 4, 259–269.
- Moritz, H. (1992): Geodetic Reference System 1980, *Geodesist's Handbook 1992*, *Bulletin Géodésique*, Vol. 66, No. 2, 187–192.
- Narodne novine, Odluka o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i kartografskih projekcija Republike Hrvatske, br.110/2004.
- Rajaković, M. (2008): Najbolja konformna konusna projekcija za Hrvatsku, *Studentski rad nagrađen Dekanovom nagradom*, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Rudolf, D. (1976): Epikontinentalni pojas. Pravni fakultet u Splitu.
- Službeni list SFRJ (1970): Međunarodni ugovori i drugi sporazumi, br.28/1970.
- Snyder, J. P. (1993): *Flattening the Earth*, The University of Chicago Press, Chicago and London.
- Solov'ev, M. D. (1946): *Kartograficheskie proekcii*, Izdatel'stvo GUGK pri SNK SSSR, Moskva.
- Tutić, D. (2008): *Stereografska i druge konformne projekcije za Hrvatsku*, doktorska disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Tutić, D. (2009): Optimal Conformal Polynomial Projections for Croatia According to the Airy/Jordan Criterion / Optimalne konformne polinomne projekcije za Hrvatsku po Airy/Jordanovu kriteriju, *Kartografija i geoinformacije*, 11, 48–67.
- Vahrameeva, L. A., Bugaevskiy, L. M., Kazakova, Z. L. (1986): *Matematicheskaya kartografiya*. Nedra, Moskva.
- DGU (2008): *Osobno priopćenje*.
- Vitkovskiy, V. V. (1907): *Kartografiya. Teoriya kartograficheskikh proyektсий*, St. Petersburg.

URL 1: Husak, M., Lapaine, M.: Odluka o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i kartografskih projekcija Republike Hrvatske
http://www.kartografija.hr/datum_i_projekcija.pdf (5. 4. 2010.)

URL 2: Protokol između Vlade Republike Hrvatske i Savezne Vlade Savezne Republike Jugoslavije o privremenom režimu uz južnu granicu između dviju država, <http://www.vjesnik.hr/pdf/2002%5C12%5C12%5C06A6.PDF> (23. 6. 2010.)