

Auxiliary Surfaces and Aspect of Projection

Many authors use auxiliary surfaces when writing about map projections. For example, they state that there are azimuthal, conic and cylindrical projections, depending on whether the Earth's sphere or ellipsoid is mapped in the plane, to the cone or cylinder surface. However, they forget that there are also pseudoconic, pseudocylindrical, polyconic, circular, mixed and other projections for which no corresponding auxiliary surfaces exist. Since some projections in these groups are of necessity mentioned in their writing, they need to explain what they are. For example, pseudocylindrical projections are described as projections onto a pseudocylinder (e.g. Srivastava 2014), although nobody actually knows what a pseudocylinder is. Others introduce oval surfaces (Clarke 2017), without seeming to notice that oval surface is not a developable surface. What is the point of mapping a sphere, which is not a developable surface, to another surface which is also not a developable surface, using only animation as a means of proof? Such explanations are hardly appropriate in professional and scientific writing about map projections, particularly in teaching materials.

There are a number of other reasons why we argue in principle for excluding the interpretation of map projections using auxiliary, intermediate or developable surfaces. Here are some of them.

- The authors of the oldest cylindrical and conic projections did not define their projections using auxiliary or developable surfaces. In the 16th century, Mercator did not use a cylindrical surface to define the cylindrical projection which bears his name today, and in the 18th century, Lambert did not use a conic surface to define the projection today known as Lambert's conformal conic projection.

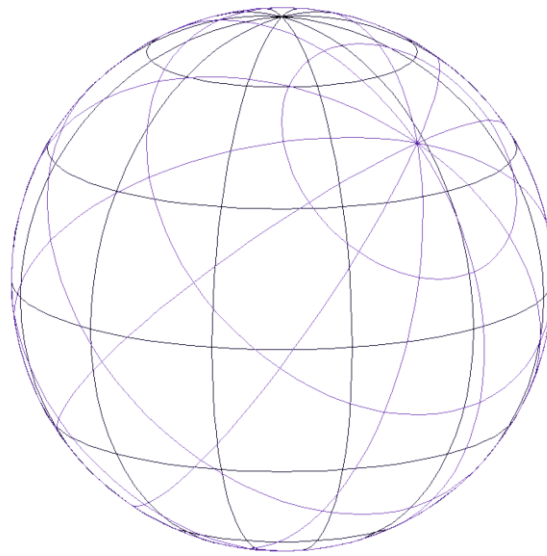


Fig. 1 Network of meridians and parallels (black) and network of pseudomeridians and pseudoparallels (blue)

Slika 1 Mreža meridijana i paralela (crno) i mreža pseudomeridijana i pseudoparalela (plavo)

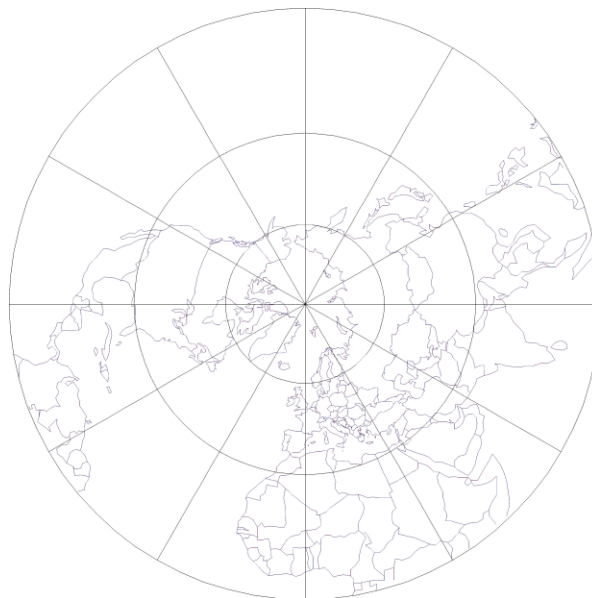


Fig. 2 Normal aspect of conformal azimuth projection

Slika 2 Uspravni aspekt konformne azimutne projekcije

O pomoćnim plohama i aspektu projekcije

U mnogim tekstovima o kartografskim projekcijama autori se služe pomoćnim plohama. Tako na primjer tvrde da postoje azimutne, konusne i cilindrične projekcije ovisno o tome preslikavaju li se Zemljina sfera ili Zemljin elipsoid u ravninu, na plašt stošca ili valjka. Pri tome zaboravljaju da postoje i pseudokonusne, pseudocilindrične, polikonusne, kružne, mješovite i neke druge projekcije za koje ne postoje odgovarajuće pomoćne plohe. Budući da neke od projekcija iz tih skupina moraju spomenuti u svojim tekstovima, onda kada treba objasniti što su to npr. pseudocilindrične projekcije pišu da su to projekcije na pseudocilindar (npr. Srivastava 2014) pri čemu nitko ne zna što je to pseudocilindar. Drugi pak uvode ovalne plohe (Clarke 2017), a pri tome ne uočavaju da takva ploha nije razvojna ploha. Kakvog smisla ima preslikavati sferu, koja nije razvojna ploha, na drugu plohu koja također nije razvojna služeći se pritom samo animacijom kao sredstvom dokaza? Takva objašnjenja nisu primjerena u stručnim i znanstvenim tekstovima o kartografskim projekcijama, a posebno ne u nastavnim materijalima.

Postoji i niz drugih razloga zbog kojih se autori ovoga članka u načelu zalažu za izostavljanje tumačenja kartografskih projekcija s pomoću pomoćnih, posrednih ili razvojnih ploha. Neki od njih su ovi:

- Autori najstarijih cilindričnih i konusnih projekcija nisu definirali svoje projekcije s pomoću posrednih, tj. razvojnih ploha. Npr. Mercator u 16. st. pri definiranju projekcije koja danas nosi ime Mercatorova cilindrična projekcija nije upotrijebio cilindričnu plohu ili Lambert u 18. st. pri definiranju projekcije koja danas nosi ime Lambertova konformna konusna projekcija nije upotrijebio konusnu plohu. Baš suprotno, nakon izvođenja jednadžbi te



Fig. 3 Transverse aspect of conformal azimuthal projection

Slika 3 Poprečni aspekt konformne azimutne projekcije



Fig. 4 Oblique aspect of conformal azimuthal projection

Slika 4 Kosi aspekt konformne azimutne projekcije

On the contrary, having performed the equations for the projection, he mentioned that a map produced in it could be rolled up into a cone.

- Authors who today go into great detail about map projections using intermediate surfaces are perhaps not aware of the fact that they are introducing double mapping into the theory of map projections. First, the Earth's sphere is mapped onto an auxiliary surface, then transformed into a map in the plane using another method, for example, development. Double mapping has a role in the theory of map projections, not in a general way, but only for certain special cases.
- In the context of classifying projections as conic, cylindrical and azimuthal/planar, it is not natural to use a plane as a developable surface if the developable surface is one that can be developed in the plane. What does developing a plane in the plane mean? Development is isometry, so from the cartographic point of view, nothing would change.
- The use of developable surfaces leads to secant projections, that is, projections onto an auxiliary developable surface which intersects the sphere, and with that the conclusion that azimuthal projections can have a maximum of one standard parallel, and conic projections a maximum of two. This is erroneous, as there are

azimuthal and conic projections with more standard parallels (Lapaine 2015).

- Authors who understand map projections to be mappings using intermediate surfaces often distinguish between contact and intersection. So, for them, as a rule the curve of intersection is also a curve with no distortion. They take this for granted, with no proof. However, it has been shown not to be the case at all (Lapaine 2017, Lapaine 2018).
- Developing an auxiliary surface in the plane preserves distance (isometry). This would mean that two parallels selected as standard parallels in *all* normal aspect projections of the Earth's sphere of a given radius would be mapped to parallels which are at the same distance from each other. This, of course, is not true, as can easily be tested.
- It is possible to understand each other perfectly without introducing auxiliary surfaces and their contact or intersection with the sphere, and to speak of *projections without distortion, or with zero-distortion* at one point, or along one curve (e.g. a parallel), or along several curves (e.g. parallels).
- Though it is a nice idea to explain mapping a sphere onto the surface of a cylinder or cone, if it avoids the mathematical basis of the process, it leads to erroneous claims, of which the authors are probably unaware. Instead of a

conceptual approach which is in some parts mistaken, we need to return to reality and not run from mathematics. Let us remember that in the not too distant past, the study of map projections was called *mathematical cartography*.

Similarly, aspect of projection explains the position of the axis of an auxiliary surface in relation to the axis of the Earth's sphere. This could be conditionally accepted for azimuthal, conic and cylindrical projections, but would not explain the normal, transverse or oblique aspects of other groups of projections, for example, Winkel's triple projection.

Therefore, we have explained one of the classifications of map projections and aspect of projection without using auxiliary surfaces (Lapaine, Frančula 2016). To this end, we used the appropriate mathematical approach. Since many cartographers, unfortunately, shy away from such an approach, we will present all the necessary definitions with theoretical accuracy, but without formulae.

In order to define azimuthal, conic, cylindrical and other groups of projections, and then the aspect of these projections, it is necessary to use a network of pseudomeridians and pseudoparallels. This network can be created through an imaginary rotation of the network of meridians and parallels in any other position (Fig.1). We have called the straight line which passes through the poles of the network of pseudomeridians and pseudoparallels the axis of the projection.

The aspect of a projection is the position of the axis of the projection in relation to the axis of rotation of the Earth's sphere.

The aspect may be normal, transverse, or oblique.

Aspekt projekcije je položaj osi projekcije u odnosu na os rotacije Zemljine sfere.

Aspekt može biti uspravni (normalni), poprečni ili kosi.

projekcije spomenuo je da bi se karta izrađena u toj projekciji mogla svinuti u konus (Lambert 1772).

- Autori koji u današnje doba vrlo detaljno opisuju kartografske projekcije s pomoću posrednih ploha možda nisu ni svjesni činjenice da na taj način uvode u teoriju kartografskih projekcija dvostruka preslikavanja. Najprije se Zemljina sfera preslika na pomoćnu plohu, a zatim se ona na neki način, npr. razvijanjem, transformira u kartu u ravnini. Dvostruka preslikavanja imaju svoju ulogu u teoriji kartografskih projekcija, ali ne općenito, nego samo u nekim posebnim slučajevima.
- U kontekstu klasifikacije projekcija na konusne, cilindrične i azimutne/ravninske, neprirodno je upotrijebiti ravninu kao razvojnu plohu kad je razvojna ploha takva ploha koja se može razviti u ravninu. Što bi to bilo razvijanje ravnine u ravninu? Razvijanje je izometrija, pa se s kartografskog stajališta time ništa ne bi promijenilo.
- Upotreba razvojnih ploha vodi na sjekuce projekcije (*secant projections*), tj. projekcije na pomoćnu razvojnu plohu koja siječe sferu i s tim u vezi zaključak da azimutne projekcije mogu imati najviše jednu standardnu paralelu, a konusne najviše dvije. To je pogrešno jer postoje azimutne i konusne projekcije s većim brojem standardnih paralela (Lapaine 2015).
- Autori koji kartografske projekcije doživljavaju kao preslikavanja s pomoću posredne plohe redovito razlikuju slučaj dodirivanja i sječanja. Pri tom je za njih u pravilu krivulja presjeka ujedno i krivulja bez deformacija. Tu činjenicu uzimaju zdravo za gotovo, bez dokaza. Međutim, pokazuje se da to općenito nije tako (Lapaine 2017, Lapaine 2018).
- Razvijanje pomoćne plohe u ravninu čuva udaljenosti (izometrija). To bi onda značilo da se dvije odabrane paralele kao standardne

paralele pri *svim* uspravnim projekcijama Zemljine sfere zadanog polumjera preslikaju u paralele koje su međusobno na istoj udaljenosti. To naravno nije istina, što se lako može provjeriti.

- Moguće se sporazumijevati savršeno bez uvođenja pomoćnih ploha i njihovih dodira ili sječanja sa sferom te govoriti o *projekcijama koje su bez deformacija, ili kod kojih je deformacija nula* u jednoj točki, ili uzduž jedne krivulje (npr. paralele), ili uzduž više krivulja (npr. paralela).
- Objašnjavanje preslikavanja sfere na plašt cilindra ili konusa zgodna je priča, koja na žalost, uz izbjegavanje matematičke pozadine tog procesa dovodi do pogrešnih tvrdnji kojih, vrlo vjerojatno, autori nisu svjesni. Umjesto conceptualnog pristupa koji je uz to u nekim svojim dijelovima i pogrešan, potrebno se vratiti stvarnosti i ne bježati od matematike. Podjetimo se samo na to da se proučavanje kartografskih projekcija ne tako davno nazivalo *matematičkom kartografijom*.

Slično tome i aspekt projekcije objašnjava se položajem osi pomoćne plohe u odnosu na os Zemljine sfere. To bi se još uvjetno moglo prihvatiti za azimutne, konusne i cilindrične projekcije, ali kako objasniti što je to uspravni, poprečni i kosi aspekt ostalih skupina projekcija ili npr. Winkelove trostruke projekcije.

Zbog toga smo jednu od klasifikacija kartografskih projekcija i aspekt projekcije objasnili ne služeći se pomoćnim ploham (Lapaine, Frančula 2016). U tu svrhu poslužili smo se odgovarajućim matematičkim pristupom. Budući da mnogi kartografi, nažalost, zadiru od takvog pristupa, to ćemo ovdje dati sve potrebne definicije teorijski korektno, ali bez i jedne formule.

Da bismo mogli definirati azimutne, konusne, cilindrične i ostale skupine projekcija, a potom i aspekt tih projekcija, nužno je poslužiti se mrežom pseudomeridijana i pseudoparalela. Ta se mreža dobiva zamišljenom rotacijom mreže meridijana i paralela

Termin aspekt projekcije nije do sada bio uobičajen u hrvatskoj kartografskoj literaturi, već su se umjesto uspravni, poprečni i kosi aspekt kartografske projekcije rabili termini uspravna, poprečna i kosa projekcija.

u bilo koji drugi položaj (sl. 1). Pravac koji prolazi polovima mreže pseudomeridijana i pseudoparalela nazvat ćemo os projekcije.

Mreža pseudomeridijana i pseudoparalela ima to važno svojstvo da neovisno o položaju osi projekcije preslikana u ravninu zadržava karakteristični oblik za pojedinu skupinu projekcija i time omogućava jednoznačnu definiciju svake skupine projekcija. U nastavku navodimo definicije najvažnijih skupina projekcija pomoću mreže pseudomeridijana i pseudoparalela (Lapaine, Frančula 2016).

- *Cilindrične projekcije* su projekcije u kojima su pseudomeridijani prikazani međusobno paralelnim pravcima, a pseudoparalele međusobno paralelnim pravcima koji su okomiti na slike pseudomeridijana.
- *Konusne projekcije* u užem smislu (*conic*) su projekcije u kojima su pseudomeridijani prikazani pravcima koji se sijeku u jednoj točki, a pseudoparalele koncentričnim kružnim lukovima, s tim da je kut između bilo koja dva pseudomeridijana manji od odgovarajuće razlike pripadnih pseudogeografskih dužina.
- *Azimutne projekcije* su projekcije u kojima su pseudomeridijani prikazani pravcima koji se sijeku u jednoj točki i međusobno zatvaraju kut koji je jednak razlici pripadnih pseudogeografskih dužina, a

In the *normal aspect*, the axis of the projection corresponds to the axis of the Earth's sphere, and the graticule of pseudomeridians and pseudoparallels corresponds to the graticule of meridians and parallels.

In the *transverse aspect*, the axis of the projection is perpendicular to the axis of the Earth's sphere.

The *oblique aspect* is neither normal nor transverse.

The network of pseudomeridians and pseudoparallels has the important property of retaining a characteristic shape for each group of projections, regardless of the position of the axis of the projection into the plane, and this allows an unambiguous definition of each group of projections. In what follows, we mention definitions of the most important groups of projections using a graticule of pseudomeridians and pseudoparallels (Lapaine, Frančula 2016).

- *Cylindrical projections* are those in which the pseudomeridians are

shown by mutually parallel lines, while pseudoparallels are mutually parallel lines perpendicular to the image of the pseudomeridians.

- *Conic projections*, in the narrow sense, are projections in which the pseudomeridians are shown as lines which intersect at one point, while the pseudoparallels are concentric arc circles, and the angle between any two pseudomeridians is less than the corresponding difference of the relevant pseudogeographic longitudes.
- *Azimuthal projections* are those in which the pseudomeridians are shown as lines which intersect at one point and mutually enclose the angle which is equal to the difference of the relevant pseudogeographic longitudes, while the pseudoparallels are concentric circles with a common centre at the point where the pseudomeridians intersect.
- *Pseudocylindrical projections* are those in which the pseudomeridians are shown as curves which are symmetrical in relation to the central meridian which is mapped as a straight line, while the pseudoparallels are mutually parallel lines perpendicular to the image of the central pseudomeridian.
- *Pseudoconic projections* are those in which the pseudomeridians are shown as curves which are symmetrical in relation to the central meridian which is mapped as a straight line, while the pseudoparallels are the arcs of concentric circles.
- *Polyconic projections* are those in which the pseudomeridians are transferred as curves which are symmetrical in relation to the central pseudomeridian which is mapped as a straight line, while the pseudoparallels are mapped as eccentric circles whose centres are located on the central pseudomeridian.

The *aspect of a projection* is the position of the axis of the projection in relation to the axis of rotation of the Earth's sphere. The aspect may be normal, transverse, or oblique.

In the *normal aspect*, the axis of the projection corresponds to the axis of the Earth's sphere, and the graticule of pseudomeridians and pseudoparallels corresponds to the graticule of meridians and parallels.

In the *transverse aspect*, the axis of the projection is perpendicular to the axis of the Earth's sphere.

The *oblique aspect* is neither normal nor transverse.

Figures 2, 3 and 4 show the normal, transverse and oblique aspects of conformal azimuthal projection.

It should be emphasised that the term aspect of projection has not been used commonly in Croatia until now, so that instead of normal, transverse and oblique aspects of map projections, the terms normal, transvers and oblique projections have been used.

Nedjeljko Frančula, Miljenko Lapaine ■

pseudoparalele su koncentrične kružnice sa zajedničkim središtem u točki u kojoj se sijeku pseudomeridijani.

- *Pseudocilindrične projekcije* su projekcije u kojima su pseudomeridijani prikazani krivuljama simetričnima u odnosu na srednji pseudomeridijan koji se preslikava kao pravac, a pseudoparalele kao međusobno paralelni pravci okomiti na sliku srednjega pseudomeridijana.
- *Pseudokonusne projekcije* su projekcije u kojima su pseudomeridijani prikazani krivuljama simetričnima u odnosu na srednji pseudomeridijan koji se preslikava kao pravac, a pseudoparalele kao lukovi koncentričnih kružnica.
- *Polikonusne projekcije* su projekcije u kojima se pseudomeridijani preslikavaju kao krivulje simetrične u odnosu na srednji pseudomeridijan koji se preslikava kao pravac, a pseudoparalele se preslikavaju kao ekscentrične kružnice čija se središta nalaze na srednjem pseudomeridijanu.

Aspekt projekcije je položaj osi projekcije u odnosu na os rotacije Zemljine sfere. Aspekt može biti uspravni (normalni), poprečni ili kosi.

Uspravni aspekt je aspekt pri kojem se os projekcije podudara s osi Zemljine sfere, a mreža pseudomeridijana i pseudoparalela podudara se s mrežom meridijana i paralela.

Poprečni aspekt je aspekt pri kojem je os projekcije okomita na os Zemljine sfere.

Kosi aspekt je aspekt koji nije ni uspravan ni poprečan.

Na slikama 2, 3, i 4 dani su uspravni, poprečni i kosi aspekt konformne azimutne projekcije.

Treba naglasiti da termin aspekt projekcije nije do sada bio uobičajen u hrvatskoj kartografskoj literaturi, već su se umjesto uspravni, poprečni i kosi aspekt kartografske projekcije rabili termini uspravna, poprečna i kosa projekcija.

Literatura / References:

- Clarke KC (2015): *Maps & Web Mapping*, eText, MyGeosciencePlace, Pearson
- Lambert JH (1772): *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung: Part III, section 6: Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten*: Berlin. Translated into English and introduced by W. R. Tobler as *Notes and comments on the composition of terrestrial and celestial maps*: Ann Arbor, Univ. Michigan, 1972, Mich. Geographical Publication no. 8, 125 p. Also reprinted in German, 1894, *Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften*, no. 54: Leipzig, Wilhelm Engelmann, with editing by Albert Wangerin
- Lapaine M (2015): *Multi Standard-Parallels Azimuthal Projections*, in: *Cartography – Maps Connecting the World*, C. Robbi Sluter, C. B. Madureira Cruz, P. M. Leal de Menezes (Eds.), Springer International Publishing, Series: Publications of the International Cartographic Association (ICA), DOI 10.1007/978-3-319-17738-0_3, 33–44
- Lapaine M (2017): *Standard parallels and secant parallels in conic projections*, *Scientific Journal of Civil Engineering*, Skopje, Vol. 6, No. 1, 127–134

Uspravni aspekt je aspekt pri kojem se os projekcije podudara s osi Zemljine sfere, a mreža pseudomeridijana i pseudoparalela podudara se s mrežom meridijana i paralela.

Poprečni aspekt je aspekt pri kojem je os projekcije okomita na os Zemljine sfere.

Kosi aspekt je aspekt koji nije ni uspravan ni poprečan.

- Lapaine M (2018): *Behrmann projection*, *Proceedings*, Eds: Bandrova T, Konečný M, 7th International Conference on Cartography and GIS, 18–23 June 2018, Sozopol, Bulgaria 226–235
- Lapaine M, Frančula N (2016): *Map projections aspects*. *International Journal of Cartography* 2, 2016, 1, 38–58. <http://dx.doi.org/10.1080/23729333.2016.1184554>
- Srivastava SK (2014): *Techniques for developing resources to understand geographic and projected coordinate systems*, *Journal of Spatial Science*, 59:1, 167–176, doi: 10.1080/14498596.2014.845538

Nedjeljko Frančula, Miljenko Lapaine ■